Lecture 2 — 25.08.15

(1)

Kapittel 7: Tøyning: (strain)

Oversikt: (over dagens forelesning)

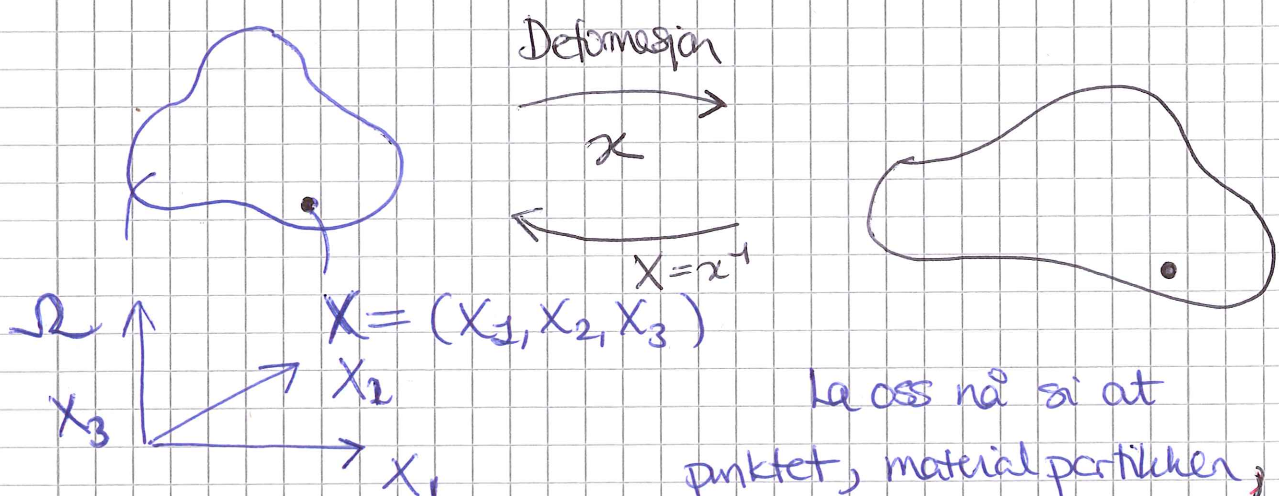
- Forskyvning (Displacement) 7.1
- Tøyning (strain) 7.2, 7.3
- (Store deformasjoner (Large deformations) 7.5)

Dagens mål:

Å introdusere begreper (forskyvning, deformasjon, tøyning, tøyningstensor) for å beskrive deformasjon av legemer.

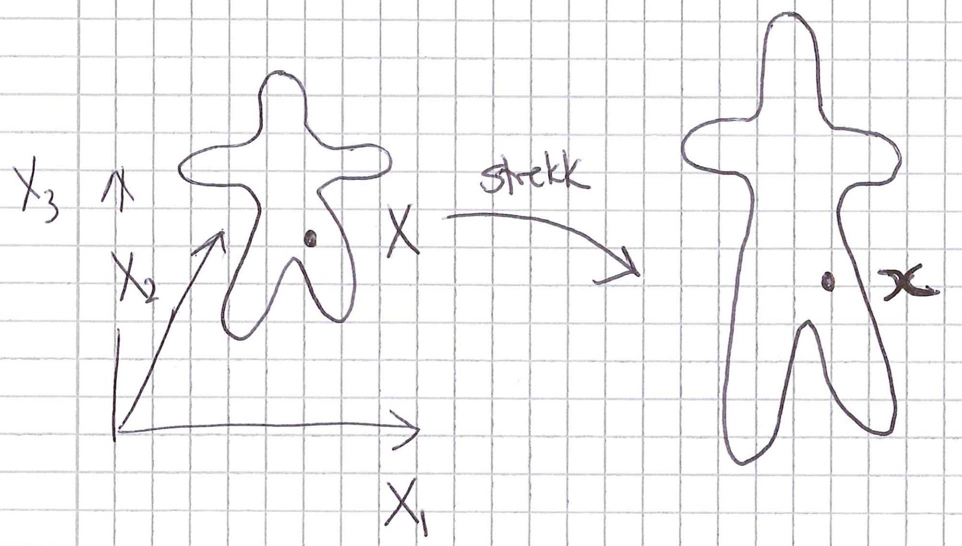
—

Anta at vi har et legeme Ω i et Kartesisk koordinatsystem



La oss nå si at punktet, material partikkelen, som i utgangspunktet befant seg i punkt X

NB: Bruker samme notasjon for aksene og koordinatene til punktet X.



X_3
X_2
X_1
X
strekk
x

nå er i punkt $x = (x_1, x_2, x_3)$

NB: Samme koordinatsystem, bare nye koordinater.

Vi skriver dette som:

$$x = x(X)$$

Ny posisjon x er en funksjon (vektorfelt) av gammel posisjon X. Vi kaller funksjonen også x

(*)

Inverse feltet:

$$X = X(x):$$

Materialpartikkelen som nå befinner seg i x kom fra X.

NB: Veldig standard, litt forvirrende i begynnelsen. Helt klart misbruk av notasjon.

Def: Funksjonen for alle $X \in \Omega$ $x = x(X)$ kalles deformasjonen eller deformasjonsfeltet.

Def: Forskyvningen defineres ut ifra endring i posisjon:

$$u(X) = x(X) - X$$

Def: Funksjonen $u = u(X)$ for alle $X \in \Omega$ kalles forskyvningen eller forskyvningsfeltet. (i Lagrange representasjon) $u(X) = x(X) - X$

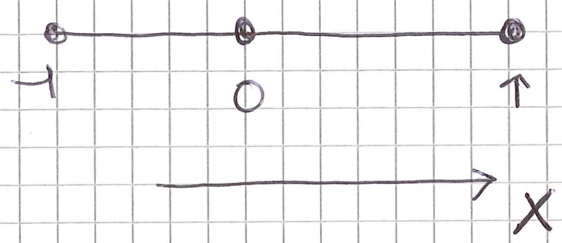
(*) Eksplisitt for $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$x_1 = x_1(X_1, X_2, X_3)$$
$$x_2 = x_2(X_1, X_2, X_3)$$
$$x_3 = x_3(X_1, X_2, X_3)$$

$$x(X) = \begin{pmatrix} x_1(X) \\ x_2(X) \\ x_3(X) \end{pmatrix}$$

La oss ta et eksempel i 1D:

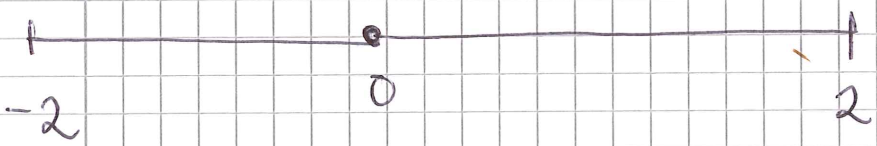
Eksempel 1:



$\Omega = [-1, 1]$

Tenk på Ω som en uendelig tynn seigmann

Anta at vi trekker i Ω i begge ender, slik at Ω blir til:



Q1: Hva er deformasjonen av Ω?

Q2: Hva er forskyvningen av Ω i Lagrange repr.?

A1:

$$x(X) = 2 \cdot X$$

Sjekk $X=0 \Rightarrow x=0$

$X=1 \Rightarrow 2 \cdot X = 2$

$X=-1 \Rightarrow 2 \cdot X = -2$

Dette er en affin transformasjon, holder å sjekke 2 punkter

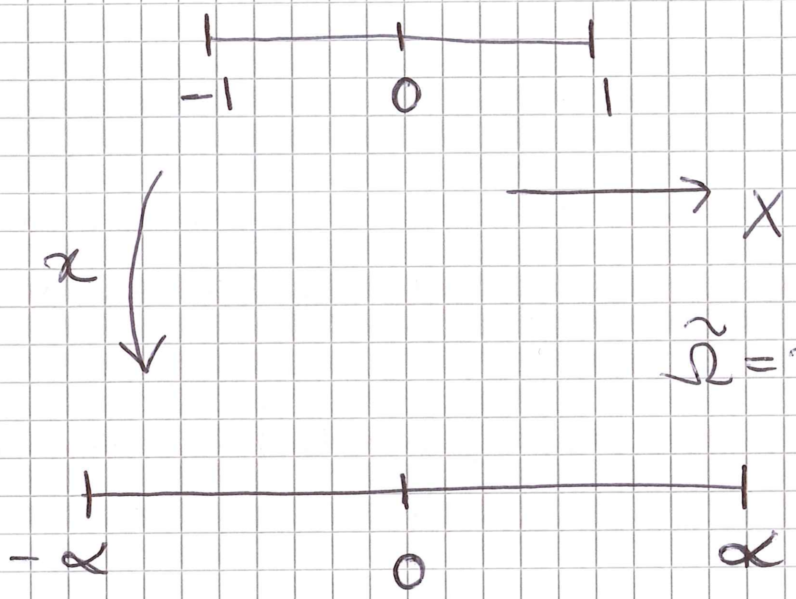
A2:

$$u(X) = x(X) - X = 2X - X = X$$

Nå er det deres tur; la oss ta et annet eksempel, litt mer generelt:

Eksempel 2: *

$\Omega = [-1, 1]$



$\tilde{\Omega} = x(\Omega) = [-\alpha, \alpha]$

Q1: Hva er deformasjonen x av Ω?

Q2: Hva er forskyvningen $u(X)$ av Ω?

Q3: Karakteriser tilfellene: (Beskriv med ord de forskjellige tilfellene)

$\alpha > 1 \quad 0 < \alpha < 1 \quad \alpha < 0$

$\alpha = 1 \quad \alpha = 0$

Ta 5 minutter og ta 5 minutter til å diskutere med sidemann.

Def: Affin deformasjon

En ~~lineær~~ affin deformasjon i 1D kan generelt skrives som

$$x(X) = a \cdot X + b \qquad a \neq 0, \ a > 0$$

med invers

$$X(x) = \frac{1}{a}(x - b) = a^{-1}(x - b)$$

(**) Merk at vi står helt frie i å uttrykke x som en funksjon av X eller via det inverse X som en funksjon av x. Så lenge funksjonen/feltet er inverterbart, så kan vi enkelt gå frem og tilbake.

(*) Merk at boken er svært streng på å bare kalle endringer i form for deformasjoner eller av og til ekte (true) deformasjoner (true deformation). Jeg gir blaffen i dette skillet.

Mer generelt i n-D (3-D), så kan enhver affin deformasjon skrives som

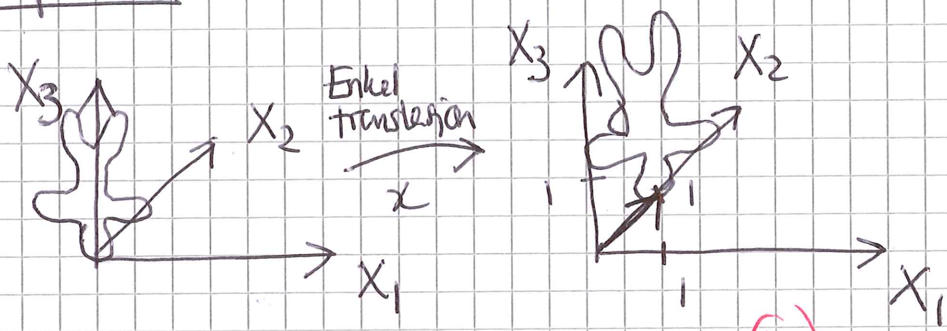
$$x(X) = AX + b$$

hvor A er en nxn (3x3) matrise og b en n-(3) vektor. A må være ikke-singulær for at dette skal gi fysisk mening

**

La oss ta et eksempel i 3D:

Eksempel 3:



NB: *

Q1: Hva er deformasjonen x?

Q2: Hva er forskyvningen $u(X)$ av Ω?

A1:

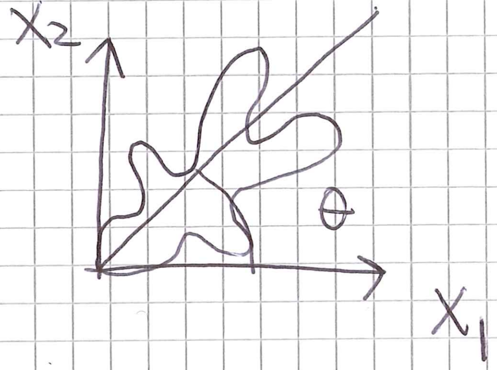
$$x(X) = \begin{pmatrix} x_1(X) \\ x_2(X) \\ x_3(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2+1 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= X + (0,1,0)$$

A2:

$$u(X) = x(X) - X = (0,1,0).$$

Eksempel 4: *



Anta at Ω er uendelig tynt i X_3-retning og at du dermed kan redusere problemet til 2D. Si at du roterer Ω med en vinkel θ i X_1-X_2 planet.

Q1: Hva er deformasjonen $x(X)$?

Q2: Hva er forskyvningen $u(X)$?

Ta 10 minutter – jobb m/ sidemann hvis du vil.

A1:

Rotasjon med vinkel θ i 2D kan beskrives med rotasjonsmatrisen

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$x(X) = R \cdot X = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X_1 \cos\theta - X_2 \sin\theta \\ X_1 \sin\theta + X_2 \cos\theta \end{pmatrix}$$

A2:

$$u(X) = \begin{pmatrix} X_1(\cos\theta - 1) - X_2 \sin\theta \\ X_1 \sin\theta + X_2(\cos\theta - 1) \end{pmatrix}$$

Lagrange vs. Euler representasjon:

Husk def. forskyvning i Lagrange rep:

$$u(X) = x(X) - X$$

Forskyvning, som en funksjon av originale koordinater X, er deformasjonen som en funksjon av —"— X minus X.

Husk også at vi skriver

$$x = x(X)$$

Og antar at det finnes en invers: $X = x^{-1}$

$$X = X(x)$$

Det betyr at vi også kan skrive forskyvningen som en funksjon av de nye koordinatene x:

Vi krever at:

$$u(x) = u(X) \cancel{= u \circ X(x)}$$

$$= x(X) - X = x - X(x)$$

Def: Forskyvning i Euler representasjon:

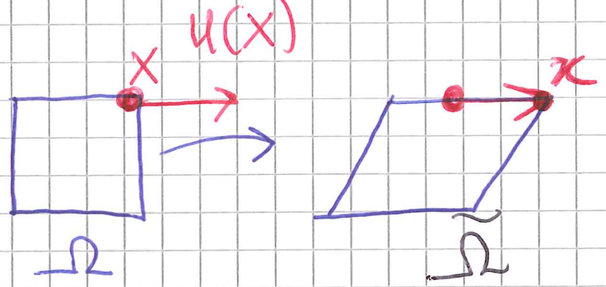
$$u(x) = x - X(x)$$

Lagrange: $U(X) = x(X) - X$

Hvor skal jeg hen?

Euler: $u(x) = x - X(x)$

Hvordan kan jeg meg ut?



Jeg forsøker å skille ved å være konsekvent med å bruke STORE bokstaver i Lagrange representasjon og små bokstaver i Euler representasjon

—

NB: Ved små deformasjoner, kan man ~~anta~~ gjøre tilnærmingen at representasjonene er like.

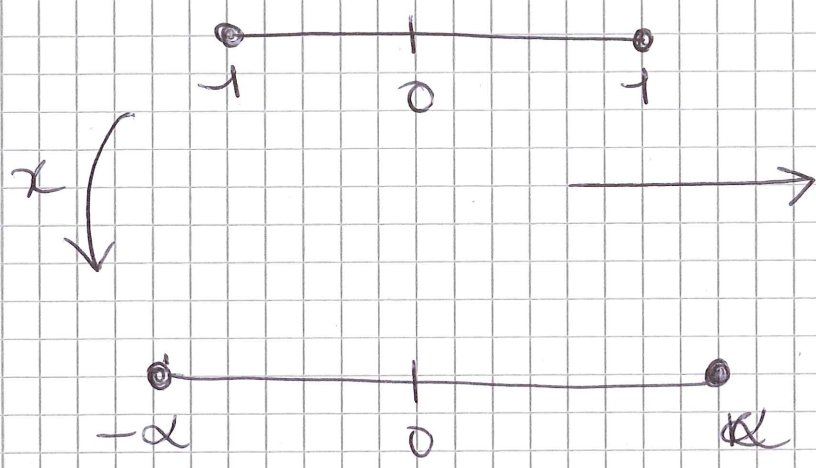
—

NB: Boken ser ut til å foretrekke å jobbe med Euler representasjon, så da gjør vi det i utgangspunktet også. Anta Euler rep. med mindre noe annet er gitt.

Eksempel 5:

La oss gå tilbake til vårt 1D-case:

$\Omega = [-1,1]$



$$\tilde{\Omega} = x(\Omega) = [-\alpha,\alpha].$$

Q1: Hva er $x(X)$?

Q2: Hva er $X(x)$?

Q3: —"— $U(X)$? Forskyvningen i Lagrange rep.

Q4: —"— $u(x)$? —"— i Euler rep.

A1: $\cancel{U(X}\ x(X) = \alpha X$

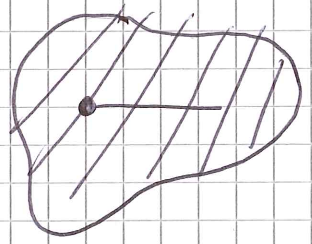
A2: $X(x) = \alpha^{-1} x$

A3: $U(X) = (\alpha - 1) X = x(X) - X$

A4: $u(x) = x - X(x) = x - \alpha^{-1} x$
$= (1 - \alpha^{-1}) x$

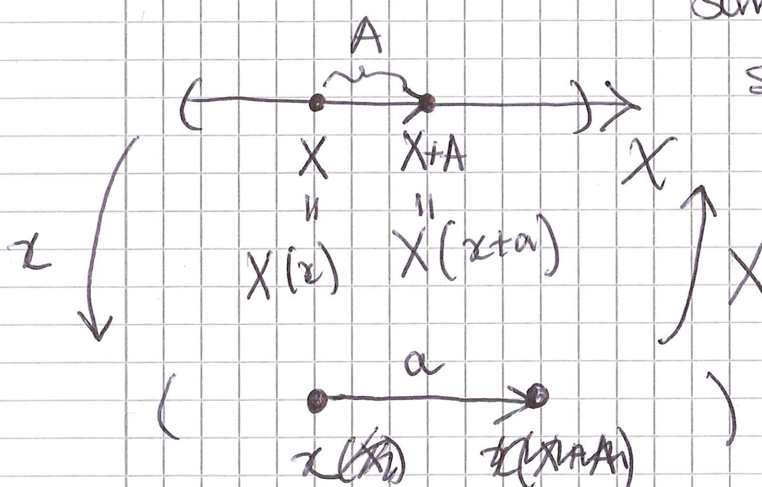
Deformasjonene vi har sett på så langt har vært svært enkle. Vi har kunnet beskrive dem med et enkelt tall, eller en konstant vektor. (skalering, translasjon). Generelt så vil deformasjonsfeltet variere ~~og~~ gjennom hele legemet. Men to punkter som starter nærme hverandre vil sannsynligvis ikke ende opp alt for langt unna hverandre, så der forventer vi å kunne finne en relativt enkel beskrivelse av hva som skjer.

Forskyvning av en infinitesimal fiber/nål/materialretning



Hvordan kan vi beskrive hva som skjer med segmentet $(X, X+A)$, eventuelt hva som ~~hva~~ har skjedd med segmentet $(x, x+a)$?

La oss starte i 1D:



$x + a =$

$$\begin{cases} u(x) = x - X(x) \\ X(x) = \cancel{u(x) - x} \\ \qquad x - u(x) \end{cases}$$

$$A = \cancel{X} - \cancel{XA} = X(x+a) - X(x)$$
$$= (x+a) - u(x+a) - x + u(x) =$$

$$A = a - u(x+a) + u(x)$$

Bruk Taylor's formel for $u(x+a)$:

$$u(x+a) = u(x) + a\,u'(x) + \frac{a^2}{2!}u''(x) + \dots$$

$$= u(x) + a u'(x) + \mathcal{O}(a^2)$$

~~$A - a$~~

Dette betyr at:

$$a - A = u(x+a) - u(x)$$

$$= u(x) + a u'(x) + \mathcal{O}(a^2) - u(x)$$

$$= a\,u'(x) + \mathcal{O}(a^2).$$

Hvis vi antar at a er liten, så er a^2 veldig liten (neglisjerbar). Da blir

$$\boxed{\delta a = a - A \sim a\,u'(x)}$$

måler en viss deformasjon.

Endringen i en infinitesimal material vektor er gitt ved a ganger den deriverte av forskyvningen.

Dette gjelder generelt! Uavhengig av deformasjon

③

$$(a\cdot\nabla u)_j = \sum_i a_i \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \sum_i a_i \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u^1}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

(*) Hva er ∇u ? Gradienten av et vektorfelt ?

① Husk at

$$\nabla f = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}_i$$

← Indeks notasjon

for et skalarfelt f

② Vi definerer

~~$(\nabla u)_j = \left\{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\}_i$~~

$$\boxed{(\nabla u)_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}$$

~~$\nabla u = \left\{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\}_{ij}$~~

~~$u = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^2 \\ u_3^3 \end{pmatrix}$~~

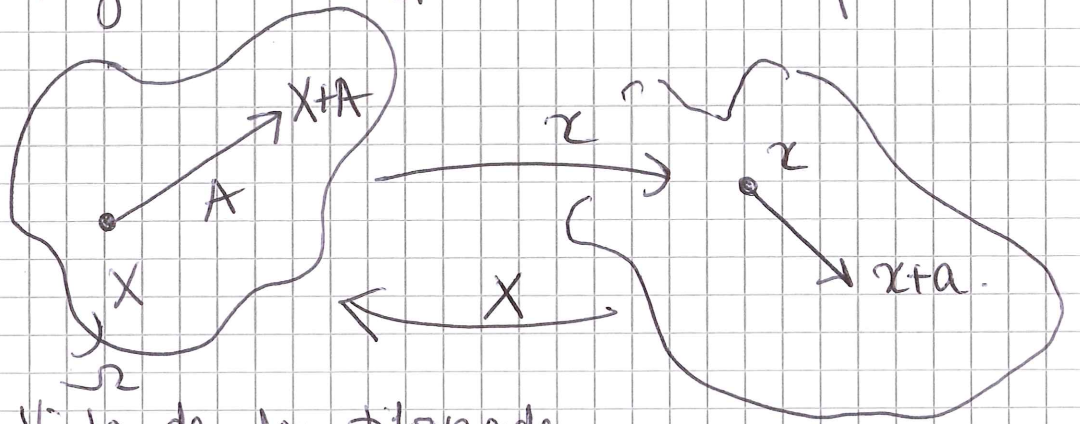
~~$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x_1} & \frac{\partial u^1}{\partial x_j} & \frac{\partial u^1}{\partial} \end{pmatrix}$~~

~~$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \\ & & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$~~

NB: I litteraturen varierer def av ∇u og ∇u^T !

$\frac{2}{(3D)}$

I generell dimensjon så kan vi se på



Vi har da den tilsvarende utledningen: (men dette er nå vektorligninger)

$$A = X(x+a) - X(x)$$
$$= (x+a) - u(x+a) - (x - u(x))$$
$$= a - u(x+a) + u(x)$$

I nD, så har vi Taylor rekke utvikling om et punkt x og en vektor a som følger

$$u(x+a) = u(x) + a^T \cdot \nabla u + \mathcal{O}(a^2).$$

(*)

Så vi får da:

$$\underbrace{u(x+a) - u(x)}_{= a - A} = u(x) + a^T \cdot \nabla u + \mathcal{O}(a^2) - u(x)$$
$$= a^T \cdot \nabla u + \mathcal{O}(a^2)$$
$$\sim a^T \cdot \nabla u \qquad \underline{a \text{ liten}}$$

Forskyvningsgradient (Displacement gradient)

NB: Forskyvningsgradienten er enhetsløs!

$x(X)$: enhet (m, m, m)

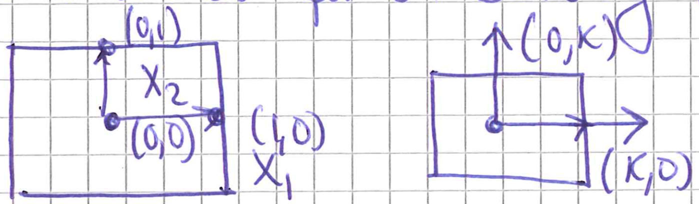
$u(X)$: —"— (m, m, m)

∇u : —"— $(-, -, -)$

$$\nabla u = \lim_{|a|\to 0} \text{"}\frac{u(x+a)-u(x)}{|a|}\text{"} = \text{"}\frac{m-m}{m}\text{"} = \text{"} 1.$$

Eksempel 6: *

Anta at du ser på en skalering i 2D gitt ved



Denne deformasjonen er gitt ved

$$x(X) = \begin{pmatrix} k\,X_1 \\ k\,X_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Q1: Hva er forskyvningen $u(x)$?

Q2: Hva er forskyvningsgradienten ∇u?

med invers

$$X(x) = k^{-1} x$$

A1:

$$u(x) = x - X(x) = x - \kappa^{-1}x$$
$$= (1-\kappa^{-1})x = (1-\kappa^{-1})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A2:

$$\left(\nabla u(x)\right)_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} 1-\kappa^{-1} & 0 \\ 0 & 1-\kappa^{-1} \end{pmatrix}_{ij}$$

$i = 1,2$; $j = 1,2$.

Siden ∇u, forskyvningsgradienten er enhetsløse, så kan vi snakke om små gradienter i en slags absolutt forstand.

Def:

Vi sier at vi er (et regime ~~med~~ av små forskyvninger) hvis forskyvningsfeltet varierer sakte / lite dvs hvis normen av gradienten er mye mindre enn 1.

$$\|\nabla u\| \ll 1$$

F.eks Frobenius norm

$$\|A\|^2 = \sum_{ij} A_{ij}^2$$

Merk at vi kan ha store forskyvninger, men svært små gradienter.

Oblig exercise:

(a) Show that Cauchy's strain tensor vanishes for pure translations and rotations in 3D.

Cauchy's tøyningstensor:

Def:

(Cauchy's)(infinitesimale) tøyningstensoren ε er definert som

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

Merk at:

(1) • ε er symmetrisk:

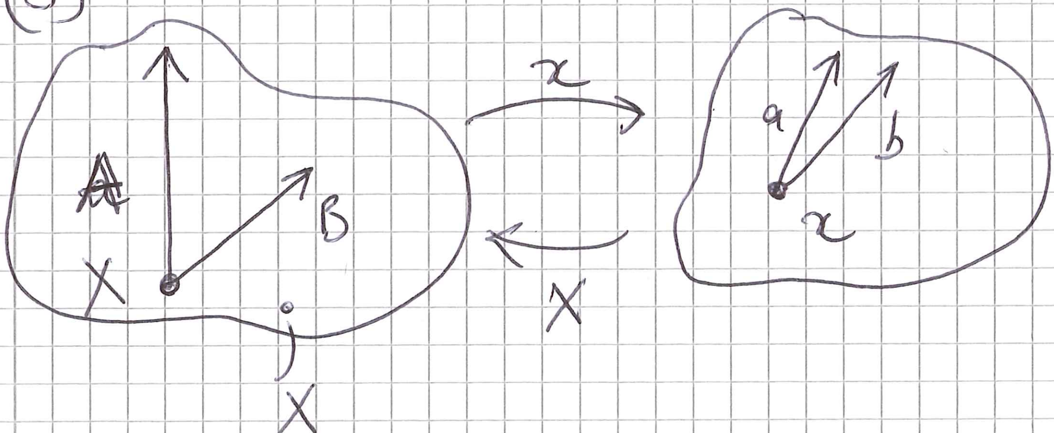
$$\varepsilon^T = \varepsilon : \quad \varepsilon^T = \frac{1}{2}(\nabla u^T + \nabla u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) = \varepsilon.$$

(2) Hvis x er en deformasjon gitt ved en ren translasjon eller rotasjon, og $u(x)$ det tilhørende forskyvningsfeltet og ε tøyningstensoren, da må

$$\varepsilon = 0$$

Exercise for the reader

(3)



Da nl

$$\delta(a \cdot b) = 2\, a^T \varepsilon\, b$$

Bevis:

Proof in Book p. 114

Better on p. 121

$$\cancel{\delta(a \cdot b) = a \cdot b - A \cdot B}$$

$$= \cancel{\left[A + u(x+a) - u(x)\right]}\left[B + u(x+B) - u(x)\right]$$

$$\cancel{- A \cdot B}$$

$$(\ldots) = \cancel{u(x+a) \cdot u(x+b)}$$

$$\cancel{A\,(u(x+b) - u(x))}$$

$$+ \cancel{B\,(u(x+a) - u(x))}$$

$$\cancel{+ O(u^2)}$$

$$=$$

Exercises

7.2, 7.3, 7.4*, 7.6, 7.10*

B.10

Go through "surface element"?