Oversikt:

(1) Kjapp repetisjon fra sist

(2) Egenskaper ved (Cauchy's) tøyningstensor 7.2 – 7.3

(3) Store deformasjoner 7.5

(1) REPETISJON

Sist gang introduserte vi følgende begreper

(i) Deformasjonen av et legeme:

$$x = x(X)$$ NB: Vektoridentitet

(ii) Gitt en deformasjon x, så definerer vi forskyvningen i Lagrange koordinater som: vektorfeltet U der

$$U = U(X) = x(X) - X$$

for alle $X \in \Omega$

(iii) Vi definerer forskyvningen i Euler koordinater som vektorfeltet u der

$$u(x) = x - X(x)$$

for alle $x \in x(\Omega)$

(iv) Gitt en deformasjon og tilhørende forskyvning i Euler koordinater u, definerer vi Cauchy's tøyningstensor ε som tensorfeltet

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

(2) EGENSKAPER VED TØYNINGSTENSOREN

(a) Tøyningstensoren er symmetrisk ($\varepsilon = \varepsilon^T$) ved definisjon; dvs $\varepsilon(x) = \varepsilon^T(x)$ for alle $x \in x(\Omega)$

(b) Tøyningstensoren er slik at hvis deformasjonen er en "rigid body motion", dvs en vilkårlig kombinasjon av translasjoner og rotasjoner, så er tøyningstensoren 0

NB: Tøyningstensoren sier noe om endring i form (filtrerer bort informasjon om endringer i posisjon.)

(c) Tøyningstensoren komponentvis:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left((\nabla u)_{ij} + (\nabla u)^T_{ij}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\nabla u_{ij} + \nabla u_{ji}\right)$$

$i, j = 1, 2, \ldots, n$ (Typisk $n = 3$)

$$\varepsilon_{11} = \nabla u_{11} = \frac{\partial u_1}{dx_1}$$

$$\varepsilon_{22} = \nabla u_{22} = \frac{\partial u_2}{dx_2}$$

$$\varepsilon_{33} = \nabla u_{33} = \frac{\partial u_3}{dx_3}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(x)_{23} = \frac{1}{2}(\nabla u_{23} + \nabla u_{32})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)$$

NB: Husk at $\nabla u_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$

$$\varepsilon(x)_{13} = \frac{1}{2}(\nabla u_{13} + \nabla u_{31})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$
$$\varepsilon(x)_{12} = \frac{1}{2}(\nabla u_{12} + \nabla u_{21})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

Siden ε er symmetrisk så blir

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13}$$
$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}$$
$$\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23}$$

(d) Merk at i 1D så vil

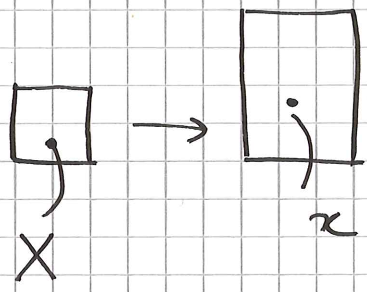
$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{du}{dx}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} = \nabla u.$$

Special case!

Eksempel 1:

La deformasjonen x av et legeme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ med koordinater X være gitt ved:

$$x(X) = \begin{pmatrix} 3X_1 \\ 4X_2 \end{pmatrix}$$



Q1:

Hva er invers deformasjonen $X = X(x)$?

Q2: Hva er forskyvningen u i Euler koordinater ?

Q3: Hva er Cauchy's tøyningstensor av u ?

A1:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 3X_1 \Longrightarrow X_1 = \tfrac{1}{3}x_1 \\ x_2 &= 4X_2 \Longrightarrow X_2 = \tfrac{1}{4}x_2 \end{aligned}\right\} X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1 \\ \frac{1}{4}x_2 \end{pmatrix}$$

A2:

$$u(x) = x - X(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1 \\ \frac{1}{4}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3\, x_1 \\ 3/4\, x_2 \end{pmatrix}$$

A3:

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

∇u er symmetrisk, så da vil $\varepsilon(u) = \nabla u$!

{ 10 min + 5 min diskusjon, så går jeg igjennom.

A symmetrisk:

$$A^T = V^T \Sigma^T U^T$$
$$= V^T \Sigma U^T = U \Sigma V = A$$

A symmetrisk $\Longrightarrow$ reelle egenverdier

NB: Sjekk noske begreper her m/ Tormod & Håvar (5)

SINGULÆRVERDIDEKOMPOSISJON

Matrise $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- Egenverdiene λ og egenvektorene v til A er gitt ved:

$$A\cancel{x} = \lambda v$$

- A kan skrives som

$$A = \underbrace{\cancel{U}}_{\mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{\Sigma}_{\mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{\cancel{V}^T}_{\mathbb{R}^{n\times n}}$$

Egenverdidekomposisjon

Σ er diagonal: og består av egenverdiene til A:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Største først

Hovedtøyninger

Hovedtøyningsretningene

~~HOVEDSPENNINGER~~ : TØYNINGER

Siden $\varepsilon(x)$ er symmetrisk (for alle $x \in x(\Omega)$) så kan vi skrive

$$\varepsilon(x) = \cancel{U}(x)\,\Sigma(x)\,V^T(x)$$

der $$\Sigma(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(x) \end{pmatrix}$$

- Egenvektorene til ε kalles "the prinsipall axis of strain"
- Egenverdiene til ε kalles

Oblig 1

Eksempel 2

La deformasjonen $x(X)$ være gitt ved:

$$x(X) = \begin{pmatrix} kX_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

Q1:

Hva er forskyvningen i Euler-koordinater ?

Q2: Hva er tøyningstensoren ?

Q3: Hva er hovedspenningene i punktet $X_0 = (0,0,0)$?

A1:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$u(x) = x - X(x) = \left(\left(1-\frac{1}{k}\right) x_1, 0, 0 \right)$$

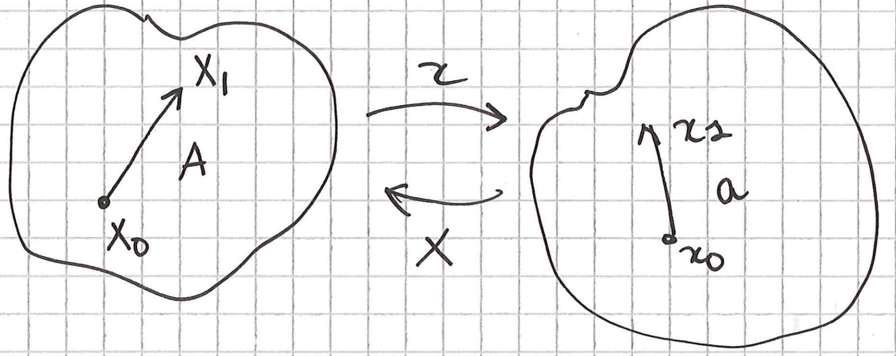
A2:

$$\nabla u = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon = \nabla u$ siden ∇u er sym.

A3:

$$\varepsilon(x_0) = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ med egenverdier $1-\frac{1}{k}, 0, 0$



$$a = x_1 - x_0 = x(X_1) - x(X_0)$$
$$= x(X_0 + A) - x(X_0)$$
$$\sim x(X_0) + A^T \nabla x - x(X_0) = A^T \cdot \nabla x$$

Observasjon:

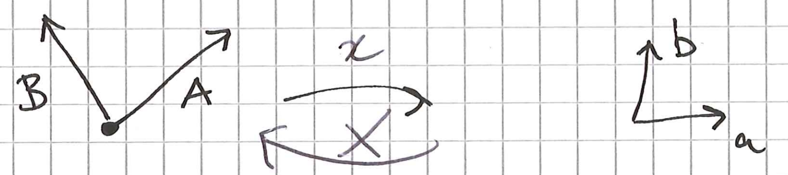
- Gitt en deformasjon x som mapper punkter (og vektorer) mellom dem, da vil en infinitisemal vektor A mappes til a der

$$a = A^T \nabla x \quad \leftarrow \text{NB: } \nabla = \nabla_X$$

Og vise versa:

$$A = a^T \cdot \nabla X \quad \leftarrow \text{NB: } \nabla = \nabla_x$$

(e) INDREPRODUKTET AV MATERIALRETNINGER UNDER DEFORMASJON.



$$A \cdot B = (a^T \nabla X) \cdot (b^T \nabla X)$$

$(\nabla X)_{ij} = \dfrac{\partial X_j}{\partial x_i}$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} a_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \left(\sum_{k=1}^{3} b_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} a_j \, b_k \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_k}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_j \cdot b_k \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_k}}_{E_{jk}}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_j \, E_{jk} \, b_k$$

$$= a^T E \, b$$

der $\quad (E)_{jk} = E_{jk} \qquad j = 1, .., 3 \quad k = 1, ... 3.$

Så for infinitesimale A, B (og a, b), har vi

$$A \cdot B = a^T E \, b$$

der $\quad \boxed{E_{jk} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_k}.}$

<u>Def:</u>

Kronecker delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

∇u_{ji}

A_{ji}

$\sum_j A_{ij} A^T_{kj}$

$\sum_j A_{ij} A_{jk} =$

$\sum_i \sum_k \{A_{ij}\} \{A_{jk}\}$

Husk at

$$u(x) = x - X(x) \implies X(x) = x - u(x)$$

Dermed at

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (*)$$

$$E_{jk} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\left(\delta_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)$$

$$= \sum_i \delta_{ij}\delta_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta_{ik} - \delta_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

$$+ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

$$= \sum_i \delta_{ij}\delta_{ik} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

$$= \overset{\delta_{1j}\delta_{1k} + \delta_{2j}\delta_{2k} + \delta_{3j}\delta_{3k}}{\delta_{jk}} - \nabla u_{jk} - \nabla u_{kj} + \sum_{i=1}^{3} \nabla u_{ji} \cdot \nabla u_{ki}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E &= I - \nabla u - \nabla u^T + \nabla u \cdot \nabla u^T \\ &= I - 2\varepsilon + \nabla u \cdot \nabla u^T \end{aligned}}$$

$$I - E = 2\varepsilon - \nabla u \cdot \nabla u^T \iff \frac{I-E}{2} = \varepsilon - \frac{1}{2}\nabla u \nabla u^T$$

$$A \cdot B = a^T E b$$

$$= a^T \left[I - 2\varepsilon + \nabla u \cdot \nabla u^T \right] b$$

$$= a^T \cdot b - a^T 2\varepsilon b + a^T \nabla u \cdot \nabla u^T b$$

I tilfellet der $\|\nabla u\|^2 \ll 1$ (~~små deformasjoner~~) (forskyvningsfeltet varierer lite), så vil

$$a \cdot b - A \cdot B \cong 2 a^T \varepsilon \cdot b \qquad (1)$$

Og generelt har vi

$$A \cdot B = a^T E b \qquad (2)$$

(1) Endringen i indreproduktet av to vektorer under deformasjon er 2x ε-indreproduktet av de deformerte vektorene når forskyvningsfeltet varierer lite

(2) ~~Indreproduktet av to udeformerte vektorer~~
Generelt:

~~$A \cdot B = a \cdot b$~~

$$a \cdot b - A \cdot B = a^T (I - E) b$$

$$= 2a^T \left(\frac{I - E}{2} \right) b$$

Euler – Almansi tensor

$$D = \varepsilon - \frac{1}{2} \nabla u \nabla u^T$$

Eksempel 3:

Vi ser på en uniform skalering med faktor κ:

$$x(X) = \kappa X$$

Q1: Regn ut Cauchy's tøyningstensor ε

Q2: Regn ut Euler-Almansi tøyningstensoren ~~E~~ D:

Q3: Diskuter størrelsen på $\|\varepsilon - D\|$.

A1:

Inversdeformasjonen $x \mapsto X$ blir

$$X(x) = \frac{1}{\kappa} x$$

Forskyvningen i Euler koordinater er:

$$u(x) = x - X(x) = \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) x$$

$$\nabla u = \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}_{ij} = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) & i = j \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} = \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \delta_{ij}$$

$\varepsilon = \nabla u$ siden sym.

A2:

$$D_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \delta_{ij} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \delta_{kj} \cdot \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)_{kj}$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)^2\right] \delta_{ij}$$

$\delta a \sim$

$$\delta [f(a)] \sim \left| \boxed{f'(a) \cdot \Delta a} \right| = f(a+h) - f(a)$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{\Delta a}$$

(1)

(2)

(1) $\delta [f(a)] = f(a+h) - f(a)$ h ting

$\simeq f'(a) \cdot h$

(2) Regneregler som for derivasjon gjelder ??

$\delta [\alpha f(a)$

$$\delta [f(a) + g(a)] = (f' + g')(a) [h]$$

$$= f'(a)[h] + g'(a)[h]$$

⋮

$\delta [$

Vi har sett på endring i indreproduktet mellom to materialretninger under deformasjon.
Hva med endringer i (i små deformasjonsregime)

(a) Lengder av materialretninger ?

(b) Vinkler mellom materialretninger ?

[(c) Kurver definert ved —"— ?]

(d) Volumer utspent av —"— ?

[(e) Overflater —"— ?]

—

Vi introduserer (som boken) litt notasjon:

For en tensor C skriver vi projeksjonen av tensoren på vektorene a, b som:

$$C_{ab} \equiv \frac{a^T C b}{|a||b|}$$ (NB: Kun notasjon)

—

F.eks: Da blir

$$\delta(a \cdot b) \equiv a \cdot b - A \cdot B = 2 |a||b| \varepsilon_{ab}$$

for endring i indreprodukt av to materialretninger under deformasjoner med små variasjoner.

(a) ENDRINGER AV LENGDER

$$|a| - |A| = \delta(|a|)$$

$$\delta(|a|^2) = \delta(a\cdot a) = 2\,|a|^2\, \varepsilon_{aa}$$

$$\shortparallel$$

$$2\,\delta(|a|)\cdot|a|$$

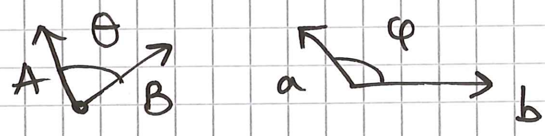
$$\Longrightarrow \quad \delta(|a|) = |a|\,\varepsilon_{aa}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\delta(|a|)}{|a|} = \varepsilon_{aa}$$

" Den relative endringen i lengde av materialretningen a er gitt ved projeksjonen av tøyningstensoren ε på a, a "

(b) ENDRINGER AV VINKLER

Anta at vinkelen mellom a og b er gitt ved φ.



$$a\cdot b = |a|\,|b| \cos\varphi$$

$$\delta(a\cdot b) = \delta(\,|a|\,|b| \cos\varphi)$$

$$= \delta(|a|)\,|b| \cos\varphi + |a|\,\delta(|b|)\cdot\cos\varphi$$
$$- |a|\,|b|\, \sin\varphi \cdot \delta\varphi$$

Løs ut for $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi = \frac{-\left(\delta(a\cdot b) - \delta|a|\,|b|\cos\varphi - |a|\,\delta|b|\cos\varphi\right)}{|a|\,|b|\sin\varphi}$$

$$\dots = \frac{-(2|a||b|\varepsilon_{ab} - |a|\varepsilon_{aa}|b|\cos\varphi - |a||b|\cos\varphi\,\varepsilon_{bb})}{|a||b|\sin\varphi}$$

$$= \frac{-(2\varepsilon_{ab} - (\varepsilon_{aa} + \varepsilon_{bb})\cos\varphi)}{\sin\varphi}$$

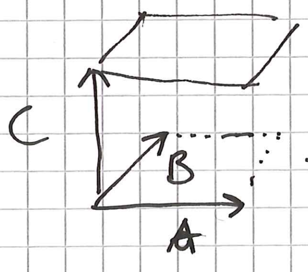
$$= \frac{(\varepsilon_{aa} + \varepsilon_{bb})\cos\varphi - 2\varepsilon_{ab}}{\sin\varphi}$$

Vi har ikke sagt noe om φ, hva om $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$:
$\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$:

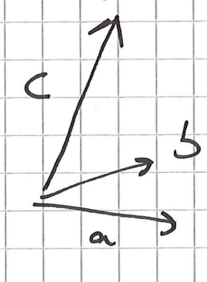
$$\delta\varphi \equiv \varphi - \theta = -2\varepsilon_{ab}$$

Det betyr at de komponentene av tøyningstensoren ε off-diagonalen angir hvor mye de lokale koordinataksene endrer vinkel. " ~~er omvendt~~

(d) ENDRINGER AV INFINITESIMALE VOLUMER:



$$V = (A \times B) \cdot C$$



$$\delta(V) = \delta(a \times b \cdot c)$$

$$= \delta a \times b \cdot c + a \times \partial b \cdot c + a \times b \cdot \delta c$$

$$= \cancel{\delta}\, a^T \nabla u \times b \cdot c$$
$$+ \cancel{\delta}\, a \times b^T \nabla u \cdot c$$
$$+ a \times b \cdot c^T \nabla u$$

$$= \Big(b \times c\, (a^T \nabla \cdot) + \cancel{a \times}\, c \times a\, (b^T \nabla \cdot)$$
$$+ a \times b \cdot c^T \nabla \cdot \Big)\, u$$

$$= (a \times b \cdot c)\, \nabla \cdot u$$

$$= V\, (\nabla \cdot u)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\delta(V)}{V} = \nabla \cdot u$$

~~The d~~ ~~Divergensen~~ Den relative endringen av et infinitesimalt volum er gitt ved divergensen av forskyvningen.

Eksempel 4 (7.5)

$$u = b \Longrightarrow \operatorname{div} u = 0$$

$$u = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{div} u = 0$$

$$u = Kx \Longrightarrow \operatorname{div} u = n \cdot K$$

Exercises:

6.5 ; 6.7

NB: Tøyninger vs. spenninger → Hooke's law.