Lecture 4: Stress (Part 1) | 07. 09. 2015

Oversikt:

(1) Oppsummering av begreper fra sist (Forelesning 3)
(2) Spenning (Stress)
(3) Spenningstensoren (Stress tensor)
(5) Trykk (Pressure)
(4) Hoved spenninger og hovedspenningsvektoer (Principal)

(1) REPETISJON:

(a) Vi har introdusert tøyningstensoren ε, som gitt en deformasjon $X \xrightarrow{x} x$ med tilhørende forskyving $u(x)$, er definert ved

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

(b) Hovedtøyningene og hovedtøyningsretningene er definert som egenverdiene og egenvektoene (orthonormalisert) til ε:

$$\varepsilon v = \lambda v$$

Hovedtøyninger

Hovedtøyningsvektorer/retninger

(c) Vi definerte Euler – Almansi tøyningstensoren

$$D = \varepsilon - \frac{1}{2}\nabla u \nabla u^T$$

(d) Vi viste at

$$\boxed{\begin{aligned} a \cdot b - A \cdot B &= 2\, a^T D\, b \\ &\simeq 2\, a^T \varepsilon\, b \end{aligned}}$$
(når $\|\nabla u\| \ll 1$)

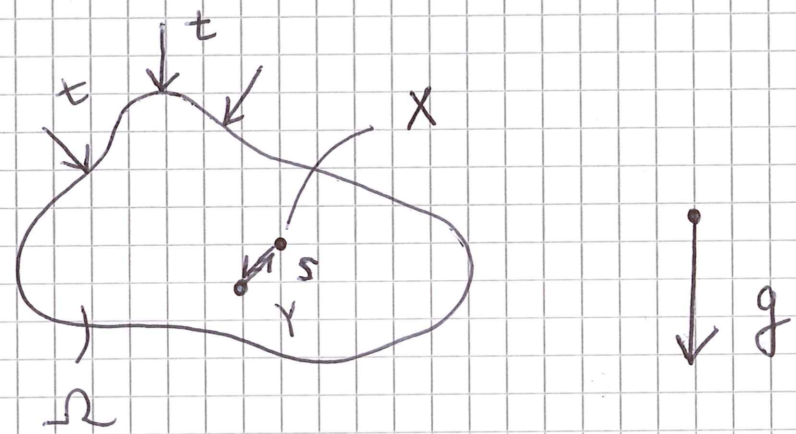
når $A, B \xrightarrow{x} a, b$ er fibre

(e) Vi viste at den relative endringen av et inf. volum

$$\boxed{\frac{\delta V}{V} = \nabla \cdot u}$$

er gitt ved divergensen av forskyvningsfeltet.

(2) Spenning (Stress, Kap 6.2)



Si at vi har et legeme $\mathcal{B}$ som opptar plassen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n=1,2,3)$. Ta en vilkårlig materialpartikkel $X \in \Omega$.

Hvilke krefter (forces) virker på X?

- Eksterne / Ytre krefter (som f.eks tyngdekraft)
- —"— overflatekrefter (fra omgivelsene)
- Interne / Indre krefter (mellom molekylene i legemet f.eks)

NB: Husk Newton's 3. lov: (Appendix A, Kap 1.3)

"Hvis to legemer påvirker hverandre, så er kraften som virker fra det første legemet til det andre, like stor og av motsatt retning som kraften som virker fra det andre legemet på det første"

Pascal er døpt etter den franske multikunstneren Blaise Pascal (1623 - 1662)

Spenninger (indre krefter i et legeme per arealenhet) oppstår f.eks ved:

- Deformasjon (Mye mer senere)
- Oppvarming / Nedkjøling

Vi definererer spenning ut i fra kraft som følger:

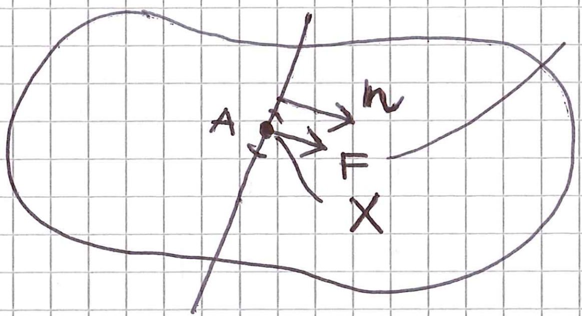
<u>Definisjon : Spenning:</u>

Spenning er kraft per flateenhet / areal

Spenning måles i $N/m^2 = 1$ Pascal (Pa)
(Kraft er typisk ett vektorfelt, dermed er også spenning generelt et vektorfelt)

Gitt definisjonen av spenning så ser vi typisk på spenning definert relativt til en flate (overflate)

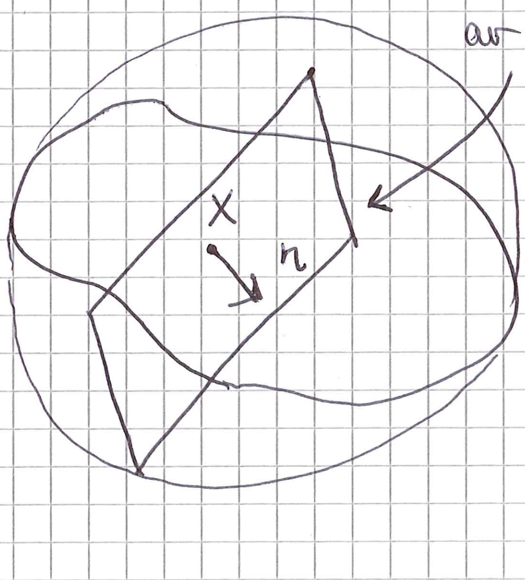
Kraft F som virker på et areal A



$\boxed{2D}$

$$S_n = \frac{F}{A}$$

Indre tverrsnitt som definerer en overflate. Overflaten beskrives av dens normalvektor $\mathbf{n} = \{n_i\}_{i=1}^{n}$



$\boxed{3D}$

(I 2D defineres en (over)flate av en linje, i 3D er dette et plan.)

Kryssprodukt av vektorer i 3D og 2D

Husk

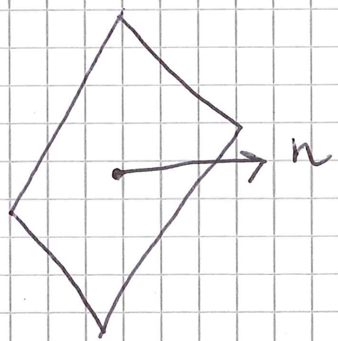
$$a \times n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 n_3 - a_3 n_2 \\ -(a_1 n_3 - a_3 n_1) \\ a_1 n_2 - a_2 n_1 \end{pmatrix}$$

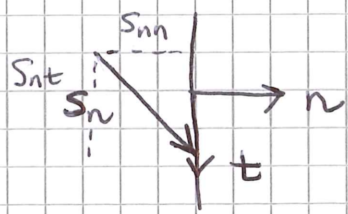
I 2D:

$$a \times n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & 0 \\ n_1 & n_2 & 0 \end{vmatrix} = a_1 n_2 - a_2 n_1$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{pmatrix} = a \cdot n^{\perp}$$

når $\quad n^{\perp} = (n_1, n_2)^{\perp} = (n_2, -n_1)$





Spennings (vektor)feltet s_n på flaten n kan deles opp i komponenter

Definisjon: Normal og skjærspenninger

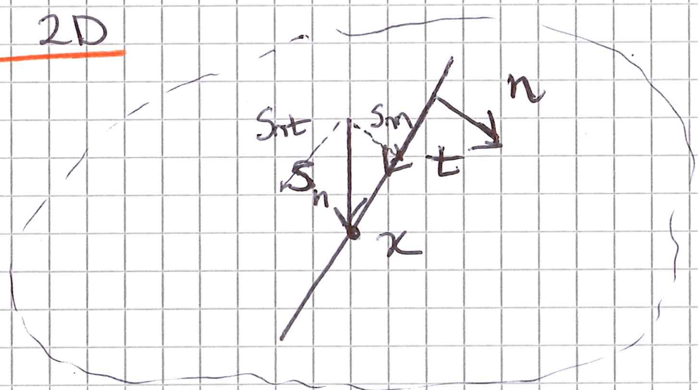
$$s_{nn} = s_n \cdot n \quad \text{(Normalspenningen)}$$

$$s_{nt} = |s_n \times n| \quad \text{(Skjærspenninger)} \text{ (Tangensialspenninger)}$$

Intuitivt i 1D:

- Da finnes kun en komponent s

I 2D



Overflate definert ved n. Tangentialvektoren til n er $t = n^{\perp}$. Spenningene på flaten i punktet x

er gitt ved $s_n = (s_{n1}, s_{n2})$

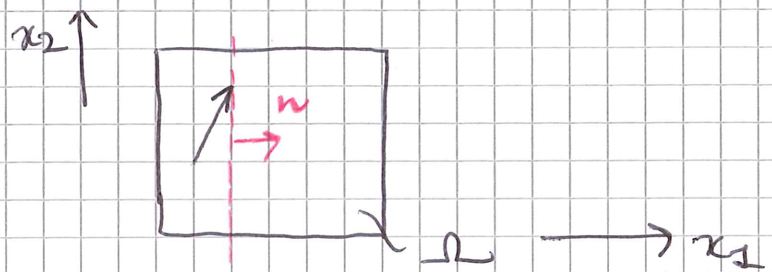
$$s_{nn} = s_n \cdot n$$
$$s_{nt} = s_n \cdot t =$$

Vi kan skrive $s_n = s_{nn}\, n + s_{nt}\, t$

I 3D, se det.

Eksempel 1:

Anta at vi har et legeme Ω i $2D = [0,1]^2$



Anta at du har ent spenningsfelt på planet / flaten som står normalt på x_1-aksen $(n = (1,0))$ gitt ved

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Q1: Hva er normalspenningen s_{nn} ?

Q2: Hva er skjærspenningen(e) s_{nt} ?

A1:

$$s_{nn} = s_n \cdot n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

A2:

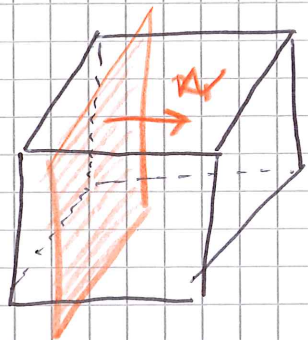
$$t = n^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$s_{nt} = s_n \cdot t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -2$$
$$= s_n \times n =$$

NB: I dette eksemplet var planet / flaten definert som ~~via~~ en av aksene og dermed blir normal og tengensial-spenningene komponentene av spenningen. Dette gjelder ikke generelt.

Eksempel 2:

Anta at vi har et legeme $[0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$



Anta at du har et spenningsfelt som virker på flaten/planet som står normalt på x_1-aksen: gitt ved

$$S_n^{(x)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x = (x_1, x_2, x_3)$$

Q1: Hva er normalspenningen $S_{nn}(x)$?

Q2: Hva er skjærspenningene $S_{nt}(x)$?

A1: $n = (1, 0, 0)$ | $t_1 = (0,1,0)$, $t_2 = (0,0,1)$

$$S_{nn}(x) = S_n(x) \cdot n = 1$$

A2:

$$S_{nt}(x) = S_n^{(x)} \times n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0, -(-x_3), -2) = (0, x_3, -2)$$

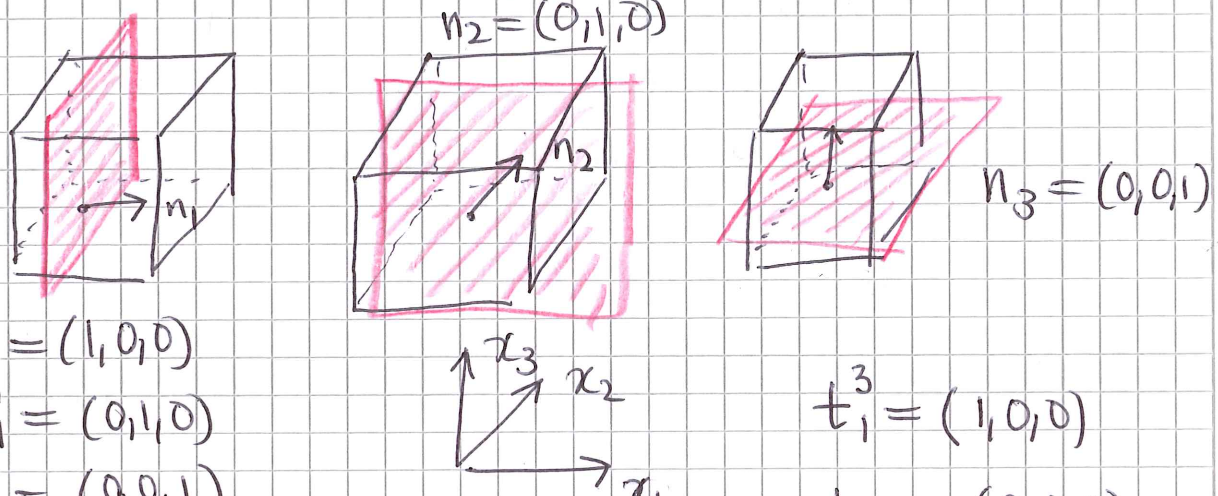
$$S_{nt_1}(x) = S_{nt}(x) \cdot t_1 = x_3$$

$$S_{nt_2}(x) = S_{nt}(x) \cdot t_2 = -2$$

(3) SPENNINGSTENSOREN (Kap 6.3)

Men, si nå at vi har krefter som virker på et legeme plassert i et $x_1-x_2-x_3$ koordinatsystem.

Vi kan da se på spenningene på en flate normalt med x_1-aksen,



$n_1 = (1,0,0)$

$t_1^1 = (0,1,0)$

$t_2^1 = (0,0,1)$

$t_1^2 = (1,0,0)$

$t_2^2 = (0,0,1)$

$t_1^3 = (1,0,0)$

$t_{32} = (0,1,0)$

$S_{n_1} = (S_{n11}, S_{12}, S_{13})$

$S_{n_2} = (S_{21}, S_{22}, S_{23})$

For n_1:

$$S_{n_1 n_1} = S_{n_1} \cdot n_1 = S_{11} \leftarrow \text{Normalspenning}$$

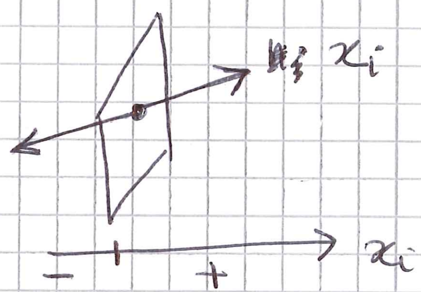
$$\left.\begin{aligned} S_{n_1 t_1} &= S_{n_1} \cdot t_1 = S_{12} \\ S_{n_1 t_2} &= S_{n_1} \cdot t_2 = S_{13} \end{aligned}\right\} \text{Tangensialspenninger}$$

Tilsvarende for n_2:

$$S_2 = (S_{21}, \underline{S_{22}}, S_{23})$$

$$S_3 = (S_{31}, S_{32}, \underline{S_{33}})$$

Observasjon: 1



σ_{ij} er positiv hvis legemet/materialet på x_i − pluss siden av overflaten trekker i materialet (in tension)

σ_{ij} er negativ hvis legemet dytter på materialet på andre siden (in compression)
(under pressure)

Observasjon/Definisjon:

En

Tensile stress : Strekkspenning

Pressure stress == compressive stress = Trykkspenning.

Så dette kan vi oppsummere i et tensorfelt

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} S_{11}(x) & S_{12}(x) & S_{13}(x) \\ S_{21}(x) & S_{22}(x) & S_{23}(x) \\ S_{31}(x) & S_{32}(x) & S_{33}(x) \end{pmatrix}$$

La $S_{ij} \equiv \sigma_{ij}$

Der σ_{ij} altså er spenningskomponenten som virker på flaten med normal x_i, ~~komponent j~~ (i retning x_j-aksen.

Denne tensoren, σ, kalles Cauchy's spennings tensor.

Definisjon: Cauchy's spenningstensor:

Cauchy's spenningstensor $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ har komponenter σ_{ij} der σ_{ij} er spenningskomponenten som virker på ~~en~~ flate med normal x_i i retning med x_j-aksen.

Gitt spenningstensor (feltet), så vil spenningen på en flate med vilkårlig normal n være gitt ved

$$\boxed{S_n = \sigma \cdot n}$$

$$(S_n)_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} \cdot n_j) \qquad i = 1,2,3)$$

Bevis: Se boken s. 101 "Proof of Cauchy's stress hypothesis".

Spenningene på en flate er motsatt av spenningene på andre siden.

Merk at ved Newton's 3. lov "kommutert" "bor" vi ha at

$$\boxed{S_n = -S_{-n}}$$

Dette følger fra:

$$\sigma \bullet n = -(\sigma \bullet -n) = -S_{-n}$$
$$\begin{array}{c} \sigma \bullet n \\ \| \\ S_n \end{array}$$

Cauchy's spenningstensor antar vi at er symmetrisk:

$$\sigma = \sigma^T \quad \text{dvs.} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad j,i = 1,2,3$$

- Mer om dette senere
- For "vanlige" materialer så vil dette være tilfelle.

Eksempel 3:

La spenningstensoren være gitt ved $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$\sigma(x) = (x_i x_j)_{i,j=1}^{3} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

Q1:

Hva er spenningene som virker på et plan som står normalt på x_1-aksen?

A1:

$$S_{x_1} = \sigma \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2x_1 \\ x_3x_1 \end{pmatrix} = x \cdot x_1$$

NB: Husk også at egenverdiene er gitt ved

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

NB2: Husk at

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

(4) HOVEDSPENNINGER OG HOVEDSPENNINGSRETNINGER

Husk at en symmetrisk matrise $A \in \mathbb{R}^n$ har reelle egenverdier $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ og ~~eo~~ orthonormale egenvektorer $\{v_i\}$ der

$$A v_i = \lambda_i v_i \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Videre så kan A faktoriseres som

$$A = V \Sigma V^T$$

der $V = [v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n]$ og $\Sigma = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Siden vi antar at spenningstensoren er symmetrisk så vil den ha reelle egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\sigma(x)\, v_i = \lambda_i v_i \qquad i=1,2,3$$

med egenvektorer v_i.

Definisjon: Hovedspenninger

(i) Egenverdiene til spenningstensoren σ kalles hovedspenninger

(ii) Egenvektorene til spenningstensoren σ kalles hovedspennings-retninger/vektorer/akser.

Eksempel 4:

Komponentene til spenningstensoren i et punkt x er gitt ved

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Q1: Hva er normalspenningene ~~på~~ i x_2-planet?

Q2: Hva er spenningene i planet med normal $n = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$?

Q3: Hva er hovedspenningene ~~og hovedspennings retningene~~ til σ?

A1:

$$(\sigma \cdot e_2) \cdot e_2 = 4 \qquad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A2:

$$\sigma \cdot n = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

A3: Egenverdiene er gitt ved røttene av

$$\det(\sigma - \lambda I) = 0$$

$\cancel{\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -4}$

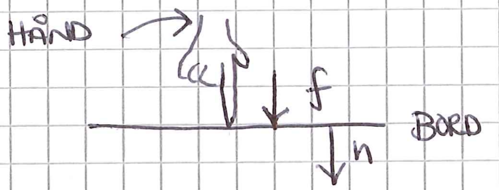
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 6 \\ 3 & 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(4-\lambda)(1-\lambda) - 36\right]$$

~~λ_2~~ ~~Røtter~~ ~~1, 3, 4~~

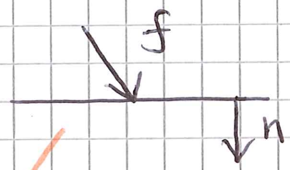
$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

TOLKNING HOVEDSPENNINGER / RETNINGER

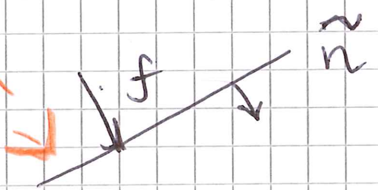
Hvis du har en ~~kraft~~ spenning på en flate, så er det ingenlunde garentert at kraften virker "rett på"/ normalt på flaten:



vs.



Men hva om du roterer flaten slik at ~~kraften~~ spenningen virker normalt



Da vil

$$\underset{(\tilde{n})}{\sigma}\cdot\tilde{n} = f = \alpha\cdot\tilde{n}$$

Dette er nettopp en hovedspenningsretning~~ene~~ og størrelsen på spenningen er da gitt ved hovedspenningen ~~ene~~: α

(5) TRYKK (PRESSURE)

Hvis

$$\sigma = pI = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \qquad (\sigma_{ij} = p\delta_{ij})$$

så beskriver denne spenningstensoren et rent (isotropt) trykk.

Da vil

$$\sigma \cdot n = p \cdot n$$

for alle flater gitt ved normal n.

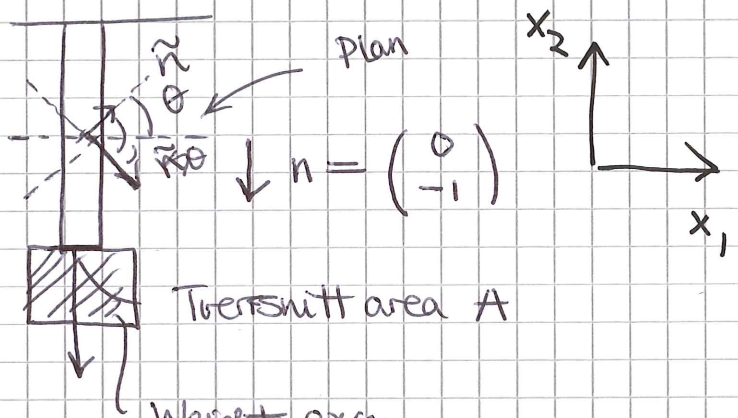
Definisjon Mekanisk trykk

For en generell spenningstensor σ definerer vi det (mekaniske) trykket som

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\equiv -\frac{1}{3}\operatorname{tr}(\sigma)$$

Eksempel 5 (p.14, Bjørn Gjevik, MEK2200 komp.)



Vekt virker med kraft $F = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

$$S_n = \frac{F}{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg/A \end{pmatrix}$$

(1) Hva er normalspenningen i planet gitt ved n ?

$$S_{nn} = mg/A$$

(2) Hva er skjærspenningen —— " ——

$$S_{nt} = 0$$

(3) Hva er spenningene i planet gitt ved $\tilde{n}$?

$$S_{\tilde{n}} = \sigma \cdot \tilde{n}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mg/A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ mg/A \sin\theta \end{pmatrix}$$

Gitt

normalspenning $\quad S_{\tilde{n}\tilde{n}} = \frac{mg}{A} \sin^2 \theta$

skjærspenning $\quad S_{\tilde{n}\tilde{t}} = -\frac{mg}{A} \sin \theta \cos \theta$

$$\tilde{t} = n^{\perp} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{mg}{A} \sin(2\theta)$$

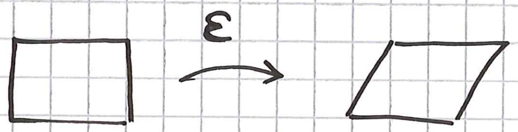
$|S_{\tilde{n}\tilde{t}}|$ max når $\theta = 45$.

Dette betyr at maksimal skjærspenning oppstår i flater som danner 45° på lengderetningen.

$\longrightarrow \square$

- Yield criteria / Tensile strength (von Mises)

- Vis spenningseksempler for enkle (med skjær) deformasjoner.



- Some simple states of stress