Overview:

(i) Oppsummering av sist forelesning

(ii) Flytkriterier (Se disse notatene)

(iii) Bevegelsesligningen (6.3 – 6.4)
- Kraft i et volume (Total force)
- Mekanisk likevekt (Mechanical equilibrium)
- Randbetingelser

(iv) Arbeid og energi (7.4)

—

(i) Oppsummering av forelesning 4:

- Vi definerte spenning som kraft per flateenhet ($N/m^2 = Pa$)
- (Interne) spenninger virker over flater, der flaten kan beskrives via sin normalvektor n. Hvis spenningen i punkt x over flaten m/ normal n er gitt ved s_n, så er

$$s_n \cdot n := \text{Normalspenningen}$$
$$s_n \times n := \text{Tangential eller skjærspenninger}$$

- Cauchy's spenningstensor $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i=1,j=1}^{d,d}$ der σ_{ij} er j'dte komponent av spenningsvektoren som virker på en flate med normal x_i.

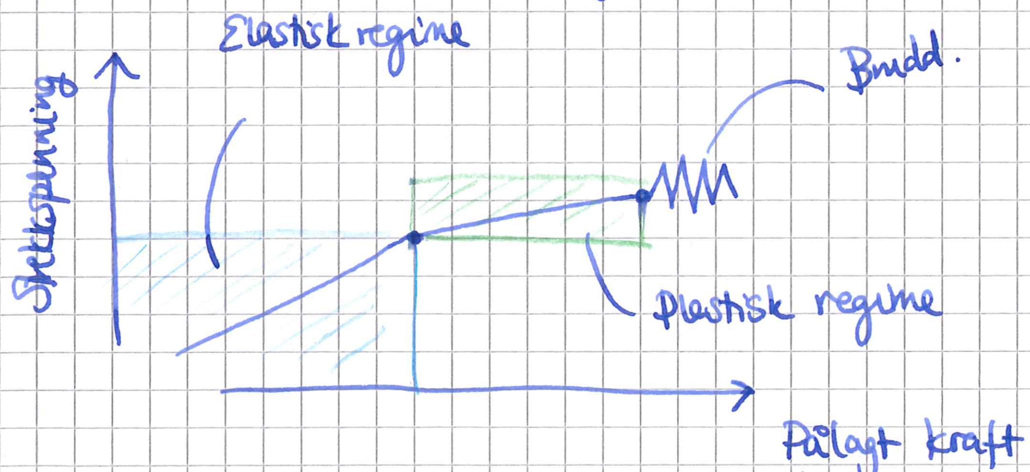
- Videre så er $\boxed{S_n = \sigma \cdot n}$
- Vi definerte hovedspenningene og hovedspenningsretningene som egenvodiene og egenvektorene til spenningstensoren.

—

(ii) FLYTKRITERIER

Generelt, hvis man, si trekker i et fast legeme, så vil legemet strekkes elastisk (reverserbart) først, så plastisk (ikke-reverserbart) og så brekke/ryke

- Den største strekkspenningen et materiale kan håndtere uten brudd kalles materialets strekkstyrke (tensile strength)
- Den største strekk spenningen et materiale kan håndtere uten plastisk deformasjon kalles (yield stress)



Noen eksempler på strekkstyrke og styrke (se tabell i boken s. 100):

	Flyt	Strekk	(MPa)
Stål	250	415	
Aluminium	35	90	
Kobber	70	220	
Hud (Human) *	15	20	
Hår (Human) *		380	
Kevlar *	3620	3757	

*: [Wikipedia: Ultimate tensile strength, 13.09.2015]

Q: Kan vi, utifra oppgitt evnt. beregnet spenningstensor evaluere om et materiale vil "flyte" (deformeres permanent) gitt dets flytstyrke?

A: "Ja". Typisk beregner man sekundære kvantiteter ut ifra spenningstensor-feltet og vurderer om verdien er under gitt kritisk verdi. Dette kalles flytkriterier.

La oss ta et konkret eksempel på flytkriterie ...

Definisjon: von Mises spenning:

Von Mises spenningen σ_{vM} er et skalarfelt definert ut i fra spenningstensorfeltet σ ved:

$$\sigma_{vM} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2+\sigma_{12}^2)\right]^{1/2}$$

Von Mises flytkriterium sier at:

Vi er i et elastisk regime hvis

$$\sigma_{vM} < \sigma_y$$

der σ_y er ~~strekk~~ flytstyrken for materialet.

Merk at alternative flytkriterier finnes (f.eks Tresca).

Alternativ definisjon von Mises spenning:

Merk at enhver tensor (spenning / tøyning) kan deles i en deviatorisk og en hydrostatisk del som følger:

$$\sigma = \sigma_{dev} + \underbrace{\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\sigma) I}_{\text{– Mekanisk trykk}}$$

$$\sigma_{dev} = \sigma - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\sigma) I$$

NB: Merk at dette gir en definisjon av σ_{dev}.

Da kan σ_{vm} defineres på følgende ekvivalente måte:

$$\sigma_{vm} = \left(\frac{3}{2} \sigma_{dev} : \sigma_{dev} \right)^{1/2}$$

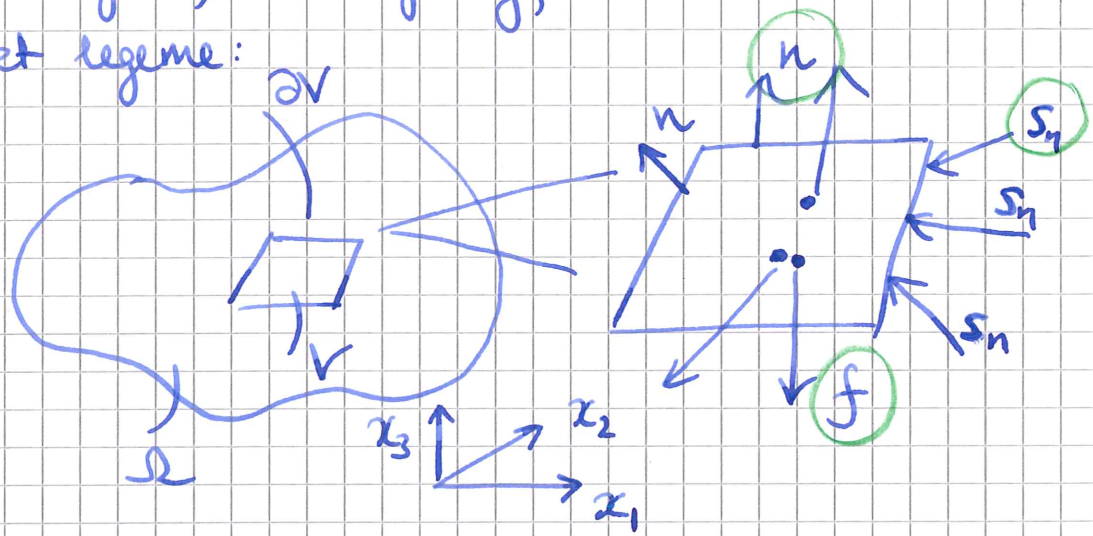
Exercise: Vis at disse to definisjonene er ekvivalente.

Eksempel: Se gruppeoppgavene for denne uken.

(iii) TOTAL KRAFT OG BEVEGELSESLIGNINGEN.

Q: Når er et legeme i mekanisk likevekt?

La oss se på hvilke krefter/spenninger som virker på et legeme, eller egentlig, et hvilket som helst volum V av et legeme:



Anta at det virker en volumkraft f på ~~legemet~~ massen innenfor volumet V og at det virker spenninger S på overflaten/randen ∂V (med normal n)

Merk at f her er kraft per masse ("krafttetthet").

N / m^3 $\quad f = \rho g$

Da vil den totale kraften i V være gitt ved

Vektor komp i

$$F_{tot_i} = \int_V f_i^{(x)} dx + \int_{\partial V} s_{n_i}^{(x)} ds \qquad (N)$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

Det Cauchy's spenningstensor

$$= \int_V f_i^{(x)} dx + \int_{\partial V} (\sigma^{(x)} \cdot n)_i \, ds$$

$$(\sigma^{(x)} \cdot n)_i = \sigma_i(x) \cdot n$$

Gauss teorem p 615

$$= \int_V f_i(x) dx + \int_V \operatorname{div} \sigma_i(x) \, dx$$

Gauss teorem:

Bevis: Se App. C p. 615

La u være et glatt vektorfelt og la Ω være et åpent $\checkmark$ område med rand $\partial\Omega$ og utoverpekende normal n. Da vil

$\checkmark$ begrenset

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot n \, ds$$

$$F_{tot} = \int_V f(x) + \operatorname{div} \sigma(x) \, dx$$

$$= \int_V f(x) + \nabla \cdot \sigma^T(x) \, dx$$

Husk Newton's 2. lov:

" Massen ganger akselerasjonen av en materialpartikkel er lik summen av alle kreftene som virker på den"

Anta nå at legemet vårt har tetthet $\rho = \rho(x)$ og akselerasjon $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$, da blir akselerasjonen av massen innenfor volumet V:

$$\int_V \rho \, \mathbf{a}_i \, dx = F_{tot_i} \qquad i=1,2,3$$

$$\int_V \rho \, a \, dx = \int_V f(\cancel{x}) + \nabla \cdot \sigma^T \, dx \quad (*)$$

Så, det vanligste trikset noensinne i kontinuumsmekanikk,

Vi har ikke sagt noe om V (annet enn at det bør være større eller lik en materialpartikkel), så da ser vi at $(*)$ like gjerne gjelder punktvis:

$$\boxed{\rho \, a = f + \nabla \cdot \sigma^T}$$

Bevegelses-ligningen

$\frac{N}{m^3}$

(Eksplisitt

$$\boxed{\rho(x) \, a(x)_i = f(x)_i + \nabla \cdot \sigma_i}$$

Definisjon: Mekanisk likevekt:

I mekanisk likevekt så må $a = 0 \Rightarrow F_{TOT} = 0$

dvs:

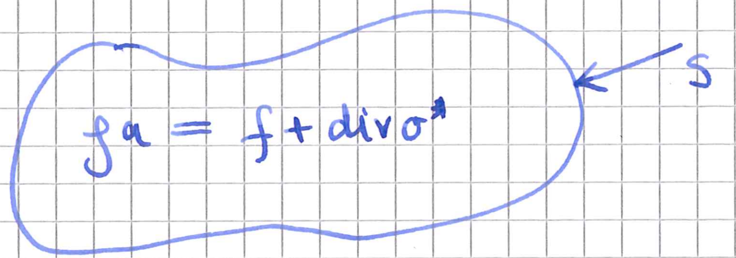
$\frac{N}{m^3}$

$$\boxed{f + \nabla \cdot \sigma^T = 0}$$

Cauchy's likevekts ligning.

(Komponentvis: $f_i + \nabla \cdot \sigma_i = 0$) $i = 1,2,3$)

Bevegelsesligningen, og i spesialtilfellet likevekt, ~~så~~ er ~~de~~ en partiell differensialligning (vel, faktisk 3 ligninger) som gjelder for et volum Ω.



For å løse slike ligninger trenger vi to ingredienser til

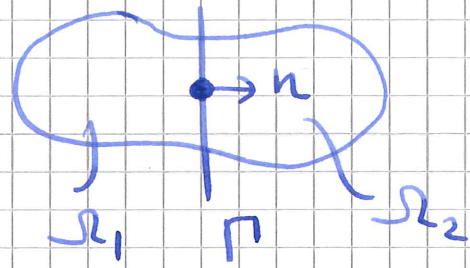
(1) Konstitutive lover (3 ligninger, 6 ukjente i σ)

(2) Randbetingelser: Gitt s der $\sigma \cdot n = s$ på $\partial\Omega$.

Mye mer om (1) senere og om løsning av slike ligninger i numerikkurs.

Merk at Newton's 3. gir at

$$\sigma\big|_{\Omega_1} \bullet n = \sigma\big|_{\Omega_2} \bullet n$$



$$S_n = -S_{-n}$$

Dvs at $\sigma \bullet n$ må være kontinuerlig (fysisk og matematisk sett)

Merk at dette ikke betyr at hele σ og ei heller at det mekaniske trykket $-\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\sigma)$ er kontinuerlig.

Eksempel 1:

La spenningstensor (feltet) i et legeme være gitt ved

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} \beta x_1 & \kappa x_2 \\ \kappa x_2 & \beta x_1 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{Pa})$$

der $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Anta $\beta, \kappa \in \mathbb{R}$

(1) Beregn divergensen til σ ($\mathrm{div}\,\sigma$, $\nabla \bullet \sigma^T$)

(2) Anta at en ytre kraft virker på legemet på formen $f = (f_x, 0)$

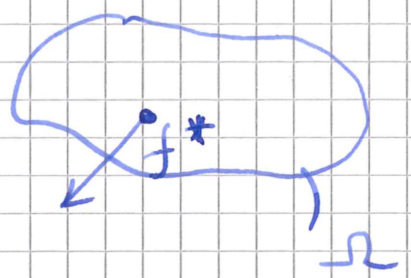
Hva er betingelsen for likevekt ?

(Dvs gi f_x uttrykk ved β, κ (eller vice versa) slik at legemet er i likevekt overalt.)

(iv) ARBEID OG ENERGI (7.4)

Tanke eksperiment:

Anta at du har et legeme som ikke er i mekanisk likevekt, dvs det er en total kraft som virker på legemet (som er ikke-null i minst ett punkt)



For å beholde legemet i denne posisjonen, så må det virke virtuelle krefter

$$f' = -f^*$$

$$f^* = f + \operatorname{div} \sigma$$

ytre volumkrefter

interne krefter fra spenninger

Anta nå at alle punktene $x \in \Omega$ forskyves med en forskyvning

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x) \in \mathbb{R}^3$$

NB: Abuse of notation

men at $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ (ingen forskyvning på randen).

Da definerer vi arbeidet (work) av de virtuelle kreftene under denne forskyvningen som

$$W = \int_V f' \cdot \mathbf{u} \, dx = -\int_V (f + \operatorname{div} \sigma) \cdot \mathbf{u} \, dx$$

("Arbeid = Kraft · avstand")

Flervariabel delvis integrasjon (Pugg!)

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div}\sigma \cdot u \, dx = -\int_\Omega \sigma : \underbrace{\nabla u}_{\text{grad}(\,)} \, dx + \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot n)\cdot u \, ds}$$

For alle som kommer til å drive med diff. ligninger og numerikk så er dette den nyttigste formelen dere noensinne kommer til å ~~kunne~~

Her er

$$\operatorname{div}\sigma = \nabla \cdot \sigma^T$$
$$\operatorname{grad} u = (\nabla u)^T$$
$$A : B = \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij} B_{ij}$$

Da kan vi skrive:

$J = N \cdot m$

Joule

$$W \overset{\text{def}}{=} -\int_V (f + \operatorname{div}\sigma)\cdot u \, dx \overset{\text{ekspander}}{=}$$

$$-\int_V f \cdot u \, dx - \int_V (\operatorname{div}\sigma)\cdot u \, dx \overset{\text{Delvis integrasjon}}{=}$$

$$-\int_V f \cdot u \, dx + \int_V \sigma : \nabla u \, dx - \cancel{\int_{\partial V} (\sigma \cdot n)\cdot u \, ds}^{\,0}$$

Egenskap v/: og σ symmetrisk

$$= -\int_V f \cdot u \, dx + \int_V \sigma : \varepsilon(u) \, dx$$

$\frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$

Konklusjon:

$$W = -\int_V f \cdot u \, dx + \int_V \sigma : \varepsilon(u) \, dx$$

Dette er et uttrykk for det virtuelle arbeidet under en vilkårlig forskyvning u.