Lecture 6: Hooke's law   21.09.2015

(Kapittel 8)

Oversikt over dagens forelesning:
(1) Oppsummering fra sist (Lecture 5)
(2) Hooke's lov (8.1–8.2)
(3) Eksempler på statiske, uniforme deformasjoner (8.3)
(4) Elastisk energi og arbeid (8.4)

—

(1) OPPSUMMERING FRA LECTURE 5

Sist gang, så startet vi med å se på flytkriterier.
Vi definerte begrepene
* strekkstyrke σ_t (max strekkspenning uten brudd)
* flytstyrke σ_y (max strekkspenning uten perm. def.)
(Merk at flytstyrken er lavere enn strekkstyrken)

Vi definerte von Mises spenningene $\sigma_{vM}^2 = \frac{3}{2}\sigma_{dev} : \sigma_{dev}$
og von Mises flytkriterium: $\sigma_{vM} < \sigma_y$.

Deretter utledet vi at den totale kraften som virker i/på et volum V av et legeme Ω er gitt ved

$$\boxed{F_{tot} = \int_V f \, dx + \int_V \operatorname{div} \sigma \, dx}$$

Total kraft (N)

Volumkrefter (N/m³)

Divergensen av spenningstensoren $\left(\frac{N}{m^2} \cdot \frac{1}{m}\right)$

NB: hviss $\equiv$ hvis og bare hvis

Derifra utledet vi bevegelsesligningen (momentligningen):

Spenningstensoren

(N/m^d)

$$\boxed{\rho a = f + \operatorname{div} \sigma}$$

Tetthet

Akselerasjon

Ytre volum krefter

og konkluderte med at et legeme er i (mekanisk) likevekt hviss

$$f + \operatorname{div} \sigma = 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

Tilslutt utledet vi at hvis et legeme som ikke er i mekanisk likevekt forskyves med en gitt forskyvning u så vil arbeidet tilknyttet denne forskyvningen i det mekaniske kraftfeltet være gitt ved

Spenningene i legemet

$$\boxed{W = -\int_\Omega f \cdot u \, dx + \int_\Omega \sigma : \varepsilon(u) \, dx} \qquad (N \cdot m)$$

Ytre volum krefter

Tøyningstensoren ass. m/ u.

(2) HOOKE'S LOV

Husk at bevegelsesligningen(e) gir oss 3 (d=3) ligninger for spenningstensoren som har 6 ukjente. Siden vi har (mye) færre ligninger enn ukjente, så vil dette systemet typisk ha mange løsninger. Hvordan vet vi hvilken som er den riktige?

I utgangspunktet vet vi ikke det. Isteden kan vi legge til antagelser om hvordan vi tror legemet / materialet oppfører seg (typisk ut i fra eksperimenter), eller mer presist, hvordan spenningene i materialet er relatert til tøyningene i materialet. Dette setter vi opp som en ligning for spenningstensoren som funksjon av tøyningstensoren. Generelt så kalles slike ligninger for konstitutive lover.

Hooke's lov gir en slik konstitutiv lov for elastiske materialer under "små" (sakte varierende) deformasjoner, og sier at spennings(tensoren) er en lineær funksjon av tøynings(tensoren).

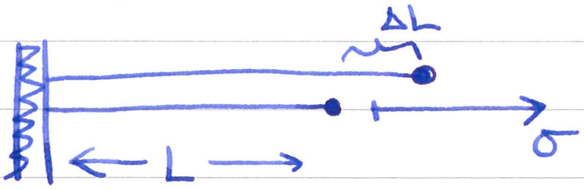
$$\boxed{\sigma = C \varepsilon}$$

σ: $Pa = N/m^2$ C: $N/m^2 = Pa$ ε: No unit

- Hooke's lov gjelder typisk for de fleste elastiske materialer opptil en viss spennings/tøyningsgrense.

Hooke's lov i 1D

La oss se på $(d=1)$ et 1D eksempel først.



Anta at vi starter med en stav av lengde (m) L, og at den spenning σ (Pa) virker/trekker i staven.
Anta at staven strekkes med (ΔL) (m), og at staven er i ny likevekt når den er $(L+\Delta L)$ [m] lang.

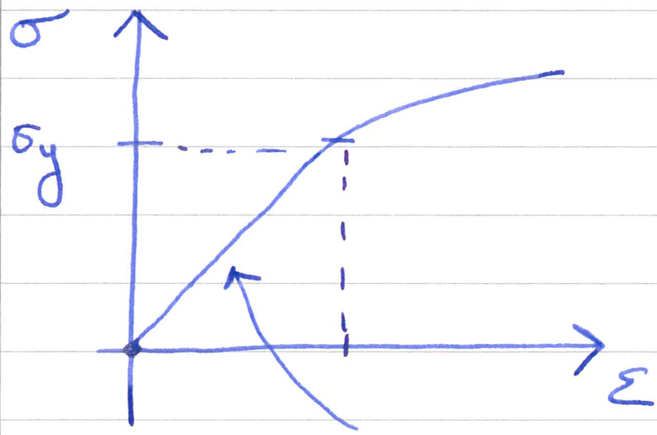
La oss si at deformasjonen er gitt ved

$$x(X) = \frac{\Delta L}{L} \cdot X + X = u + X$$

Da blir tøyningen $\varepsilon = u'(X) = \frac{\Delta L}{L}$

Merk altså at tøyningen gir relativ forlengelse i dette tilfellet.

Anta at vi faktisk gjør dette forsøket for en rekke av spenninger σ, og målet tøyningen ε, og plotter dette resultatene: Kanskje ser det omtrent slik ut:



Et slikt plott kalles en spennings-/tøynings-kurve (stress-strain kurve).

Opptil en viss grense så er $\sigma \simeq E\varepsilon$. Etter det så blir $\sigma < E\varepsilon$.

Hooke's lov i 1D gir at

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot u'$$

der E er en konstant (gitt i Pa) som kalles Young's modulus. Tenk på Young's modulus som et mål på u-strekkbarhet: jo høyere Young's modulus et materiale har, jo tyngre er det å strekke.

Eksempel 1:

1m

Anta at du har en stav av stål som du trekker i med en spenning på flytstyrken til stål 250 MPa. Young's modulus på stål er ~ 205 GPa = $205 \cdot 10^3$ MPa.

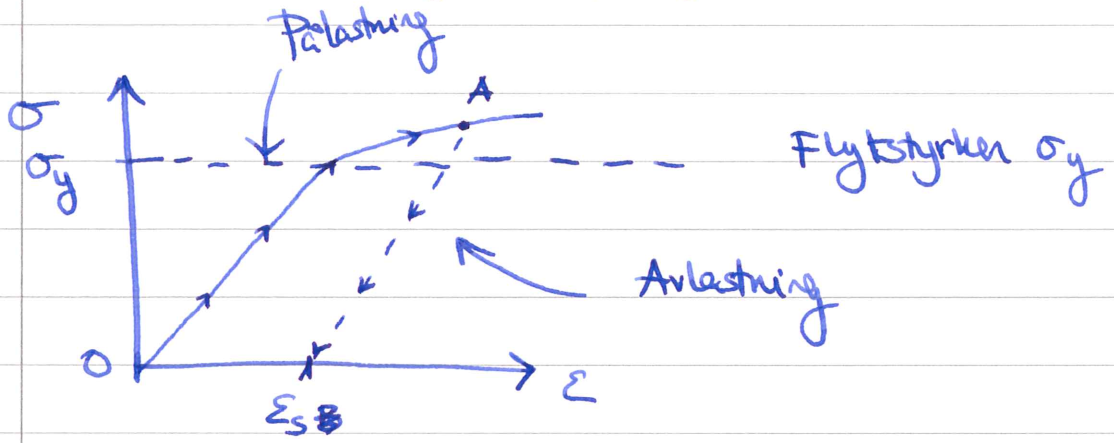
Q1: Hvis du antar at Hooke's lov holder, hvor stor blir tøyningen?

A1: $$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{250 \text{ MPa}}{205 \cdot 10^3 \text{ MPa}} \sim 1.22 \times 10^{-3}$$

Q2: Hvordan vil du tolke dette resultatet?

A2: Stål er elastisk for tøyninger på ca 0.1 %.

Mer om spennings-/tøyningskurver



Når vi har et lineært elastisk materialet så vil av- og pålastningskurvene være (tilnærmet) like. I motsatt fall, hvis avlastningskurven ikke er lik pålastningen, så viser kurven hysterese (hyterisis). I kurven, over, så ser vi at, prøven/kurven viser at vi har fått en permanent deformasjon, relativ forlengelse / tøyning ε_s. Da har vi fått en plastisk deformasjon, og materialet er plastisk for spenninger større enn flytstyrken/ flytgrensen σ_y.

Materialer som blir plastisk deformert over flytestyrken kalles duktile (kobber, aluminium). Materialer som ikke gjør det kalles sprø (glass, steinarter). Sprø materialer kan bli mer duktile under spesielle omstendigheter (høyt trykk i aksialretningen f.eks.).

I tillegg så kan det være at timingen av belastningen kan ha en innflytelse på kurvene... Dette er ~~et~~ stort felt som kalles Rheologi: studiet av deformasjonsforløp under spenninger.

Generelt i dD (d=1,2,3), så gir Hooke's lov at

$$\sigma = C\,\varepsilon$$

der C er en 4-tensor. På komponentform kan dette skrives som

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$$

På grunn av symmetribetingelsen på ε og antagelsen på σ, så får vi redusert antall fire koeffisienter. For d=3 så har C 21 = (6+5+4+3+2+1) fire komponenter. C kalles generelt stivhetstensoren.

Hvis vi videre antar at materialet er isotropt (oppfører seg likt i alle retninger, ingen foretrukne retninger), så reduseres C videre til følgende form:

$$\boxed{\sigma = 2\mu\,\varepsilon + \lambda\,\mathrm{tr}(\varepsilon)\,I}$$

Hvor μ og λ er konstanter og disse kalles Lamé koeffisienter, eller elastiske modulus.

Hooke's lov for et isotropt materiale

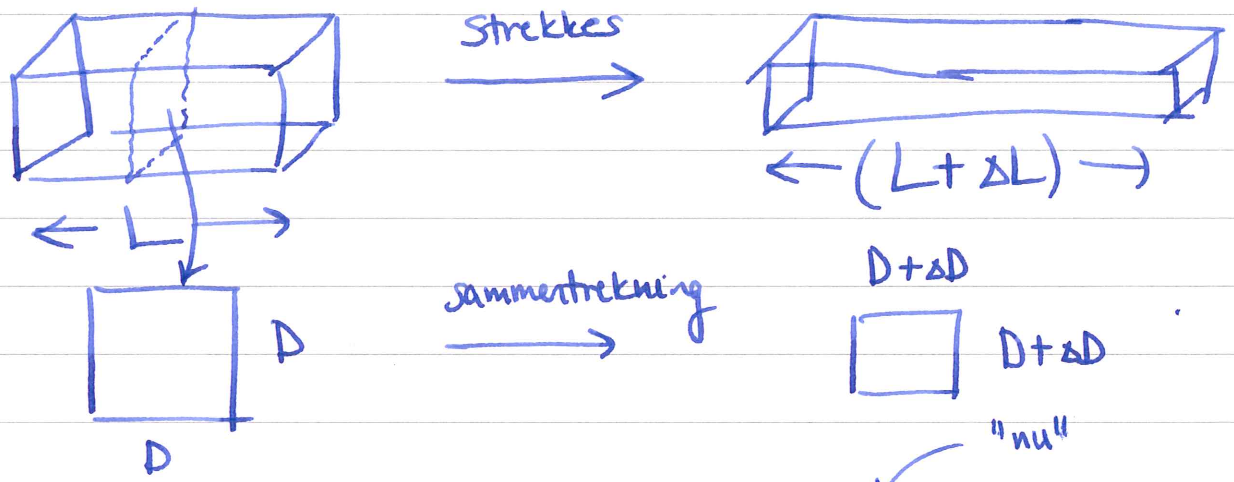
Name for λ sorely missing!

μ kalles skjærmodulus

Hvordan er Lamé koeffisientene relatert til Young's modulus?

Først, la oss definere en annen "konstant", nemlig Poisson's ratio.

Tidligere, i oppgaver bl.a, så har vi antatt at hvis en 2D/3D-stav strekkes i en retning, f.eks x_1-retningen, så skjer "ingenting" i de andre retningene. Dette er stort sett urealistisk. Mer realistisk er følgende:



der $\Delta L > 0$, $\Delta D < 0$. Vi kaller ν for Poisson's ratio:

$$\nu = -\frac{\Delta D / D}{\Delta L / L} = -\frac{\varepsilon_{\cancel{x_2 x_2}\,22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = \nu$$

Merk at Poisson's ratio typisk ligger mellom 0 og 1/2

9

Eksempel 2:

Anta at du her en ~~forskyvning~~ deformasjon av en isotrop stang gitt ved

$$x(X) = \begin{pmatrix} \alpha X_1 \\ \beta X_2 \\ \beta X_3 \end{pmatrix} + X = u(X) + X$$

Som et resultat av en spenning beskrevet ved

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q1: Hva er E (gitt ved α og P, β)?
Hva er α? (gitt ved E og P og ν)?

$$u(X) = \begin{pmatrix} (\alpha \cancel{-1}) X_1 \\ (\beta \cancel{-1}) X_2 \\ (\beta \cancel{-1}) X_3 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(X) = \begin{pmatrix} \alpha \cancel{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta \cancel{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \beta \cancel{-1} \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{\cancel{P}\,\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{P}{\alpha \cancel{-1}} \iff \alpha = \frac{P}{E}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\beta \cancel{-1}}{\alpha \cancel{-1}} = \frac{\cancel{1}-\beta}{\cancel{E/P}}$$

$$\beta = -\alpha \cdot \nu = -\nu \frac{P}{E}$$

Q2: Hva er ν (gitt ved β, E, P)?
Hva er β (gitt ved E, P, og ν)?

Men, la oss returnere til Lamé koeffisientene ... :

I eksempelet nettopp så vi på at

$$\sigma = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} P/E & & \\ & -\nu P/E & \\ & & -\nu P/E \end{pmatrix}$$

Hva får vi ~~her~~ når vi putter dette inn i Hooke's lov for et isotropisk materiale ?

$$\sigma = 2\mu\,\varepsilon + \lambda\,\mathrm{tr}(\varepsilon) I$$

(1) $$P = \sigma_{11} = 2\mu \cdot P/E + \lambda \cdot \left(\frac{P}{E} - 2\nu \frac{P}{E}\right)$$

$$= (2\mu + \lambda)\frac{P}{E} - 2\lambda\nu\frac{P}{E}$$

(2) $$0 = \sigma_{22} = -2\mu\frac{\nu P}{E} + \lambda\left(\frac{P}{E} - 2\nu\frac{P}{E}\right)$$

$$0 = \sigma_{33} = \text{——}\,''\,\text{——}$$

Løser vi disse for E og ν så får vi at

$$\boxed{E = \mu\,\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}}$$

eller / vice versa:

(*) $$\boxed{\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

E, ν gitt i praksis, bruk (*) til å regne ut μ, λ.

Eksempel 3:

Anta at et metall (stål) har Young's modulus $E = 205$ GPa og Poisson ratio $\nu = 0.29$. Beregn Lamé' koeffisientene μ og λ.

"Bulk modulus" /

Husk at vi definerte (mekanisk) trykk som

$$p = -\frac{1}{3}\operatorname{tr}(\sigma) = -\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii}$$

Hvis Hooke's lov holder så er $\cancel{\sigma_{ii} = (2\mu+\lambda)\varepsilon_{ii}}$

$$\sigma_{ii} = 2\mu\,\varepsilon_{ii} + \lambda\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{jj}$$

$$\operatorname{tr}\sigma = 2\mu\operatorname{tr}\varepsilon + \lambda\operatorname{tr}\varepsilon\cdot 3 = (2\mu + 3\lambda)\operatorname{tr}\varepsilon$$

$$p = -\frac{1}{3}\operatorname{tr}\sigma = -\left(\frac{2\mu}{3} + \lambda\right)\operatorname{tr}\varepsilon =$$

$$-\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\operatorname{div} u$$

Tallet

$$K = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

kalles "bulk modulus" og måler relativ endring i tetthet. (Husk at div u gir relativ endring i volum!)

Eksempel 4:

Mange metaller har $\nu \sim 1/3$. Hva betyr det for K og E?

A: Når $\nu = 1/3$ så er $K = E$.

Hva er tøyningstensoren gitt spenningstensoren ?
(Hooke's lov invers)

Hooke: $\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \operatorname{tr} \varepsilon I$
gir spenning gitt tøyning. Hva med det omvendte, tøyning gitt spenning?

Utledning:

$$\operatorname{tr} \sigma = 2\mu \operatorname{tr} \varepsilon + 3\lambda \operatorname{tr} \varepsilon$$
$$= (2\mu + 3\lambda) \operatorname{tr} \varepsilon$$
$$\iff (2\mu + 3\lambda)^{-1} \operatorname{tr} \sigma = \operatorname{tr} \varepsilon$$

Så
$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \operatorname{tr} \sigma I$$
$$\Updownarrow$$
$$\sigma - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \operatorname{tr} \sigma I = 2\mu \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \operatorname{tr} \sigma I \right]}$$

Bruk uttrykkene for μ og λ gitt ved E og ν:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \sigma I}$$

For ~~va~~ gyldige verdier for disse parametrene se boken s. 131. "Positivity constraints." Det avsnittet er strålende. (og pensum !!).

Vi har nå snakket mye om isotrope materialer, stoffer uten foretrukne retninger. Materialer som ikke er isotrope, dvs har forskjellig oppførsel i forskjellige retninger, kalles anisotrope. Vev er et godt eksempel. Da er man tilbake til den generelle formen på Hooke's lov:

$$\sigma = C\varepsilon$$

(3) Eksempler på statiske, uniforme tøyninger/spenninger

(1) Uniformt trykk i et isotropt, homogent materiale/legeme

$$\sigma = -p I \qquad \operatorname{tr}\sigma = -3p$$

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\sigma I$$

$$= \frac{1+\nu}{E}\sigma + \frac{\nu}{E} 3 p I =$$

$$= -\frac{1+\nu}{E} pI + \frac{3\nu}{E} pI = -pI\left(\frac{1-2\nu}{E}\right)$$

$$= -\frac{p}{3K} I$$

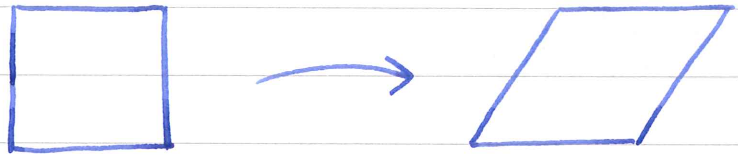
Vi integrerer og finner

$$u(X) = -\frac{p}{3K}(X_1, X_2, X_3)$$

Så et legeme, bestående av et isotropt, homogent materiale, utsatt for et konstant trykk (slik at trykket fordeles jevnt i legemet), vil trekke seg sammen uniformt med konstant $-p/3K$ der K er bulk modulus.

(2) Se tidligere eksempel med tøyning/sammentrekning av en stav.

(3) Uniformt skjær:



$$x(X) = (X_1 + \gamma X_2,\ X_2)$$

$$u(X) = (\gamma X_2,\ 0)$$

$$\nabla_X u(X) = \begin{pmatrix} 0 & \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial u_j}{\partial X_i}$$

$$\varepsilon(X) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = 2\mu\,\varepsilon + \lambda \operatorname{tr}\varepsilon\, I =$$

$$2\mu\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = \mu\,\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\mu \\ \gamma\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Så, hvis du er gitt en spenningstilstand der det bare er skjærspenninger ($\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ i dette tilfellet), så vil legemet "skjæres"/skyves m/ ~~det~~ forskyvning

$$u(x) = \left(\frac{\sigma_{21}}{\mu},\ 0\right)$$

Relevante oppgaver:

8.2*, 8.3, 8.5,* 8.7

(4) ELASTISK ENERGI OG ARBEID:

Husk at vi utledet arbeidet som kreves for en gitt liten forskyvning u i et kraftfelt (gitt ved $-f + \operatorname{div}\sigma$) som:

Tøyning

$$W = -\int_\Omega f \cdot u \, dx + \int_\Omega \sigma : \varepsilon(u) \, dx$$

Legemet

Ytre volumkrefter

Forskyvning.

Spenningstensor

Vi definerer den elastiske energitettheten som

"psi" $\rightarrow$ $\Psi = \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon(u)$

av en forskyvning i sitt eget spenningsfelt

For et lineært elastisk materiale, blir da

$$\boxed{\Psi = \frac{1}{2} C \varepsilon(u) : \varepsilon(u)}$$

For isotrope, lineært elastiske materialer så blir

$$\boxed{\Psi = \frac{1}{2}\left[2\mu \varepsilon + \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) I \right] : \varepsilon}$$

$$= \mu \, \varepsilon : \varepsilon + \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr}(\varepsilon) \cdot \operatorname{tr}(\varepsilon)$$

Og den elastiske energien $\mathcal{E}$ er gitt ved

$$\mathcal{E} = \int_\Omega \Psi \, dx \, .$$