Lecture 7: Hooke's law : Part II 28.09.2015

(Kapittel 8.3 – 8.4

Oversikt:

(1) Repetisjon fra L6 (8.1 – 8.2)
(2) Eksempler på uniforme deformasjoner i likevekt (8.3)
(3) Elastisk arbeid og energi (8.4)
(4) "Statikk" (9.1 – 9.2.1)

(1) REPETISJON

- Vi introduserte Hooke's lov, som er en konstitutiv lov for lineært elastiske materialer;

$$\sigma = C\varepsilon \qquad \left(\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{klij}\,\varepsilon_{kl}\right)$$

- For isotrope, lineært elastiske materialer, så reduseres Hooke's lov til:

$$\sigma = 2\mu\,\varepsilon + \lambda\,\mathrm{tr}\,\varepsilon\, I$$

der μ, λ er Lamé koeffisientene.

- μ og λ er relatert til Young's modulus E og Poisson ratio'en ν ved

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

Se forelesningsnotater fra Lecture 6 p. 11 – 13
og 14 – 16

—

Kapittel 9: "Basic Elastostatisk"

"Kan vi si noe om et enkelt legeme er i likevekt og hva slags deformasjoner og spenninger det opplever gitt ytre krefter."

– Ja, enten
  - numerisk
  - analytisk (i spesialtilfeller)

Analytiske løsninger og estimater kan gi god intuisjon.

Eksempler:

- Setning (9.2)
- Bøying av bjelke (9.3)
- Vridning av en sylinder (9.4)
- Trykk av en sphere/sylinder (9.5 – 9.6)

Vi antar konsekvent at vi er i et regime med sakte varierende forskyvninger ("små deformasjoner") slik at vi ikke trenger å skille på Euler og Lagrange representasjon. Jeg skriver derfor koordinater som x, forskyvning som $u(x)$ og $\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(Du + Du^T)(x)$ er tøyningstensoren.

Et homogent, isotropisk, lineært elastisk legeme i mekanisk likevekt utsatt for kun ytre volumkrefter tilfredsstiller følgende ligninger i det indre

(1) $f + \operatorname{div} \sigma = 0 \iff f_i + \operatorname{div} \sigma_i = 0 \quad i=1,2,3$

(2) $\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \operatorname{tr} \varepsilon I \iff \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \sum_{k=1}^{d} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$

(3) $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \iff \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$

hvor f er en gitt volumkraft og μ, λ er gitte (Lamé) parametre som avhenger av materialet.

I tillegg må man spesifisere randbetingelser:

(a) Dirichlet betingelser $\quad u(x) = u_0(x) \quad \forall x \in \partial\Omega_N$

(b) Neumann betingelser $\quad \sigma(x) \cdot n = t(x) \quad \forall x \in \partial\Omega_D$

der $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ og $\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_N = \emptyset$

Dere kan tolke Dirichlet betingelser som at en gitt forskyvning er spesifisert på randen, mens for Neumann betingelser så er en gitt spenning spesifisert på randen.

Vi ser på masse eksempler nå etterhvert ...

Oppgave E7.1:

Vis at (1a) og (1b) holder ⟶

Navier's ligning

Setter vi (3) inn i (2) så får vi:

$$\sigma = \mu(\nabla u + \nabla u^T) + \lambda \operatorname{div} u I \quad (*)$$

Setter vi (*) inn i (1) så får vi:

$$-\operatorname{div}(\mu(\nabla u + \nabla u^T) + \lambda \operatorname{div} u I) = f \quad (\Delta)$$

Merk at

(1a) $$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{div} u I) = \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} u)$$
$$\nabla \cdot (\lambda \nabla \cdot u I) = \nabla(\lambda \nabla \cdot u)$$

(1b) $$\overset{\nabla\cdot}{\cancel{\operatorname{div}}}(\mu \nabla u^T) = \operatorname{grad}(\mu \operatorname{div} u)$$
$$= \nabla(\mu \nabla \cdot u)$$

Bruker vi disse i (Δ) over, så får vi at

$$\boxed{-\mu(\Delta u) + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) = f}$$

der $$(\Delta u)_i = \Delta u_i = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u_i(x) \quad x = (x_k)_{k=1}^{d}$$

Navier's ligning

På komponent form:

$$-\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla \cdot u) = f_i \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Prinsipper:

(A) Husk at vi antar små deformasjoner, slik at vi ikke skiller på Euler & Lagrange koordinater

(B) Siden alt er lineært (spesielt ligningene (1)-(3)) så gjelder superposisjonsprinsippet:

Superposisjonsprinsippet:

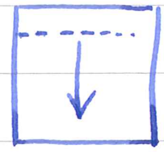
Under linearitet, hvis du først forskyver et legeme med en forskyvning u_1 og deretter med en forskyvning u_2, så vil den totale forskyvningen fra utgangsposisjon være summen:

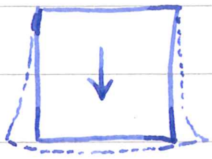
$$u(x) = u_1(x) + u_2(x).$$

(C) Saint-Venant's prinsipp:

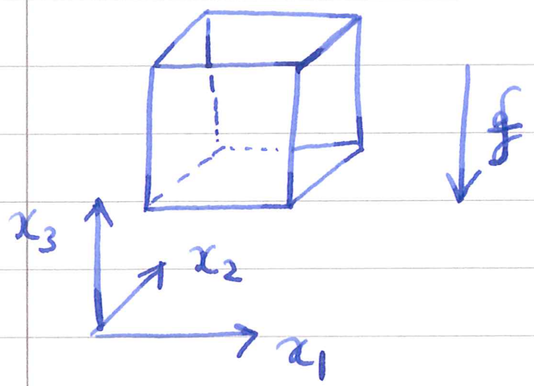
9.2 Setning

Eksempler:
- Fjell
- Hus
- Leire

Case A  m/ vegger

Case B  u/ vegger

9.2.1 Uniform setning (Case A)

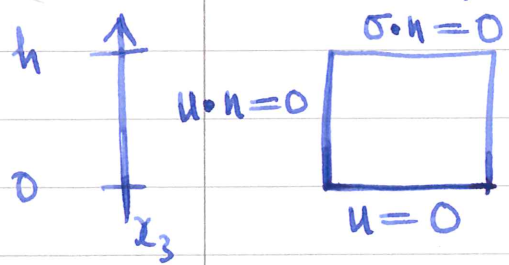


Anta at du har et elastisk "kube"/ hexaheder i en kontainer (stive, men glatte vegger) som virkes på av en tyngdekraft

$$f = (0, 0, -\rho_0 g_0)$$

Q: Hvordan og hvor mye vil legemet deformeres?

La oss se på et tverrsnitt (enklere å tegne)



(Antagelser på) randbetingelser

- Ingen forskyvning i normal retning (utover) på sidene
- Ingen forskyvning i noen retning i bunn ($x_3 = 0$)
- Ingen krefter/spenninger virker på toppen ($x_3 = h$)

- $f = (0, 0, -\rho_0 g_0)$ der ρ_0 er tettheten av det udeformerte materialet.

Utifra dette virker det naturlig å anta at forskyvningen vil være på formen

$$u(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, u_3(x_3))$$

Men hvordan vil u_3 se ut? Vi bruker ligningene for elastisk likevekt: Tøyningstensoren blir:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(Du + Du^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} u_3 \end{pmatrix}$$

Hooke's lov gir da at de eneste ikke-null spenningene blir

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \lambda \varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{33} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{33} \Rightarrow \sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{33}$$

Ekvilibrium/ Likevektsligningene ($-\operatorname{div}\sigma = f$) gir da:

$$-\operatorname{div}(\sigma_1) = 0 = 0 \qquad (\text{OK!})$$

$$-\operatorname{div}(\sigma_2) = 0 = 0 \qquad (\text{OK!})$$

$$-\operatorname{div}(\sigma_3) = \partial/\partial x_3 \sigma_{33} = (2\mu + \lambda)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} u_3(x_3) = \rho_0 g_0$$

Så vi vet at

$$(2\mu + \lambda)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} u_3(x_3) = \rho_0 g_0.$$

Vi kan nå integrere med hensyn på x_3:

$$\sigma_{33}(z) = \int_h^z \frac{\partial}{\partial x_3}\sigma_{33}(x_3)\,dx_3$$

Fundamentalteoremet for derivasjon/integrasjon

$$= -\int_z^h \frac{\partial}{\partial x_3}\sigma_{33}(x_3)\,dx_3$$

$$= -\int_z^h \rho_0 g_0\,dx_3 = -\Big[\rho_0 g_0 x_3\Big]_z^h$$

$$= -\rho_0 g_0 (h - z)$$

Husk at

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{33}$$

Observasjoner:

σ_{33} (som er 3-komponent av spenningene som virker i planet normalt med x_3-planet, de andre komponentene i dette planet er null)

er negativ, mens da det vertikale trykket $p_z = -\sigma_{33}$ er positivt og øker lineært med dybden: (fra toppen)

$$p_z \overset{(z)}{=} -\sigma_{33} \overset{(z)}{=} \rho_0 g_0 (h - z) \qquad z = x_3$$

Dette er ingen horisontale komponenter (skjær-

spenninger i dette planet. De horisontale trykkene

$$p_1^{(z)} = -\sigma_{11}^{(z)} = \quad + \frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)} \rho_0 g_0 (h-z)$$
$$p_2 = -\sigma_{22} =$$

dvs x_1-komponenten av spenningene på planet normalt på x_1-aksen og tilsvarende for x_2, vil være ikke-null, men mindre enn det vertikale trykket, men ellers variere med dybden (lineært) (som det vertikale trykket)

Tøyningen(e):

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{(\lambda+2\mu)} \sigma_{33} = -\frac{\rho_0 g_0}{(\lambda+2\mu)} (h-z)$$

vil være negativ(e), noe som tilsvarer en kompresjon/sammentrykning

Siden

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial}{\partial x_3} u_3(x_3)$$

kan vi integrere og finne

$$\int_0^z \varepsilon_{33}(x_3)\, dx_3 = \int_0^z \frac{\partial}{\partial x_3} u_3(x_3) = u_3(z) - \cancel{u_3(0)}^{\,0}$$

$$\parallel$$

$$-\int_0^z \frac{\rho_0 g_0}{(\lambda+2\mu)} (h-z) = -\frac{1}{2} \frac{(\rho_0 g_0)}{(\lambda+2\mu)} \left(h^2 - (h-z)^2\right)$$

$$= -\frac{h^2-(h-z)^2}{2D} \qquad \boxed{D = \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0 g_0}}$$

Konklusjon:

$$u_3(x_3) = -\frac{h^2 - (h - x_3)^2}{2D}$$

der D er som gitt på forrige side og representerer en "karakteristisk lengdeskala".

Forskyvningen er alltid negativ (nedover), er størst* når $x_3 = h$ og null når $x_3 = 0$. På toppen varierer den rett kvadratisk med høyden h.

NB: Øvelse for leseren -- sjekk at alle randbetingelsene holder ☺.

$\square$

Neste uke er fri! (Midttermeksamener).
Fortsetter om 2 uker med Kap 9.2 →

Oppgaver uke 7:

9.1, 9.2*, E7.1*,