

Lecture 8 : Basic Elastostatics (Del 2 av 3)

12.10.2015

Kapittel 9.2 — 9.3

Oversikt:

- (1) Repetisjon fra L7 og forts. av setning
- (2) Setning : uten vegger
- (3) Bjelker : bøying

(1) REPETISJON

Vi drøker ligningene (som vi har utledet tidligere) til å beskrive isotrope, lineært elastiske legemer i likevekt:

$$(a) \quad -\operatorname{div} \sigma = f \Leftrightarrow \operatorname{div} \sigma_i = f_i \quad (i=1,2,3)$$

$$(b) \quad \sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \operatorname{tr} \varepsilon \mathbf{I} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \sum_k \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$(c) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla u_{ij} + \nabla u_{ji})$$

hvor

- f er en gitt volumkraft
- μ og λ er Lamé koeffisientene

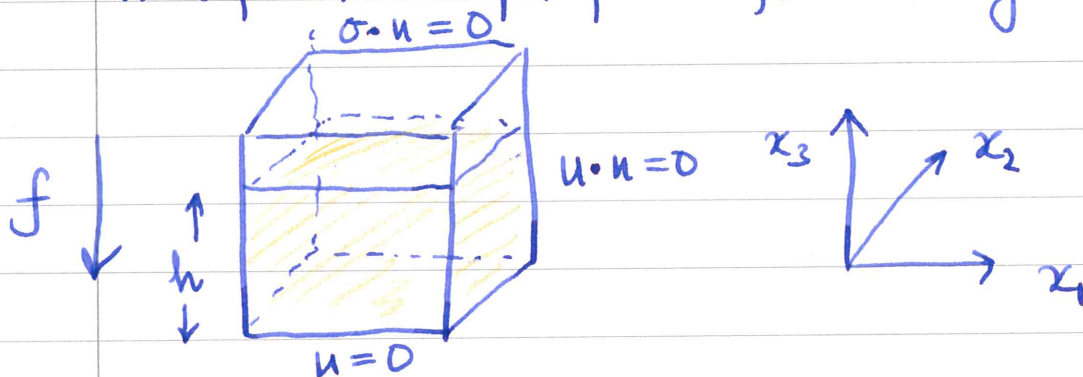
og i tillegg tilstrekkelige randbetingelser.

Vi antar sakte varierende forskyvningsgradienter og skiller dermed ikke på Euler og Lagrange koordinater.

to make a list

(2)

Vi så på et eksempel på uniform setning:



Anta at du har et elastisk legeme i en kubisk container, med stive (ikke-beregelyse), glatte vegger som virkes på av en tyngdekraft

$$f = (0, 0, -f \cdot g)$$

Q: Hvordan og hvor mye vil legemet deformeres og hvordan distribueres spennings i legemet?

Har vist (se notater fra L7) at:

$$\sigma_{33} = -f \cdot g (h - x_3)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} f \cdot g (h - x_3)$$

Alle andre spenningskomponenter $(\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}) = 0$.

Vi antok at $u = (0, 0, u_3(x_3))$ og dermed at

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial}{\partial x_3} u_3(x_3)$$

er eneste ikke-null spenningskomponent.

$$\begin{aligned} - (h^2 - (h-z)^2) &= - (h^2 - h^2 + 2hz - z^2) \\ &= - (2hz - z^2) \\ &= - z(2h - z) \end{aligned}$$

:

(3)

Hooke's lov ga oss at

$$\sigma_{33} = (2\mu + \lambda) \varepsilon_{33}$$

Så dermed vil

$$\varepsilon_{33} = \frac{-1}{(2\mu + \lambda)} f_0 g (h - x_3)$$

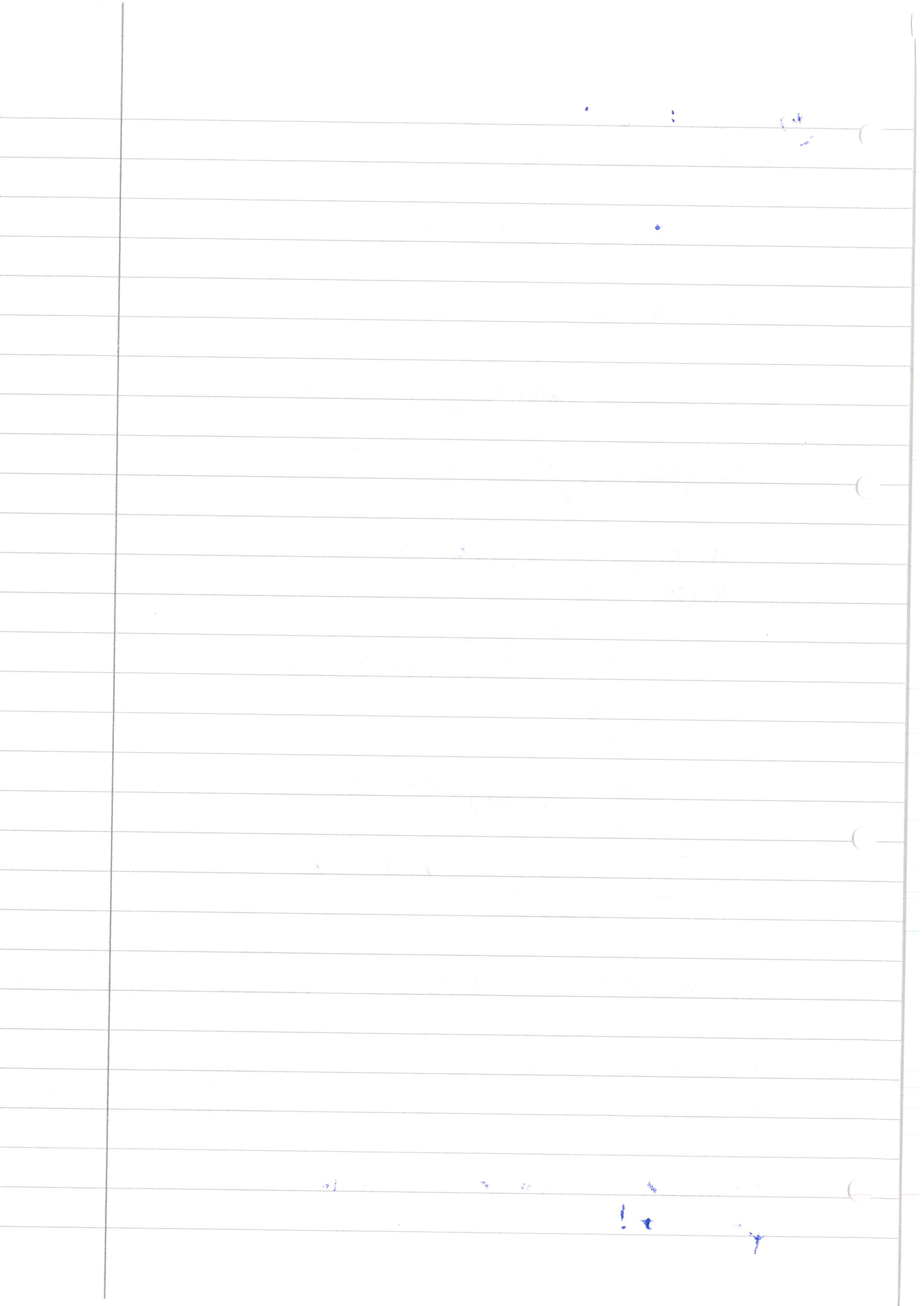
For å finne u_3 , integrer vi:

$$\begin{aligned} u_3(x_3) &= \int_0^{x_3} \varepsilon_{33}(z) dz = \\ &= \int_0^{x_3} \frac{f_0 g}{(2\mu + \lambda)} (h - z) dz \\ &= \left| -\frac{f_0 g}{(2\mu + \lambda)} \left(hz - \frac{1}{2} z^2 \right) \right|_0^{x_3} \\ &= -\frac{f_0 g}{(2\mu + \lambda)} x_3 \left(h - \frac{1}{2} x_3 \right) \end{aligned}$$

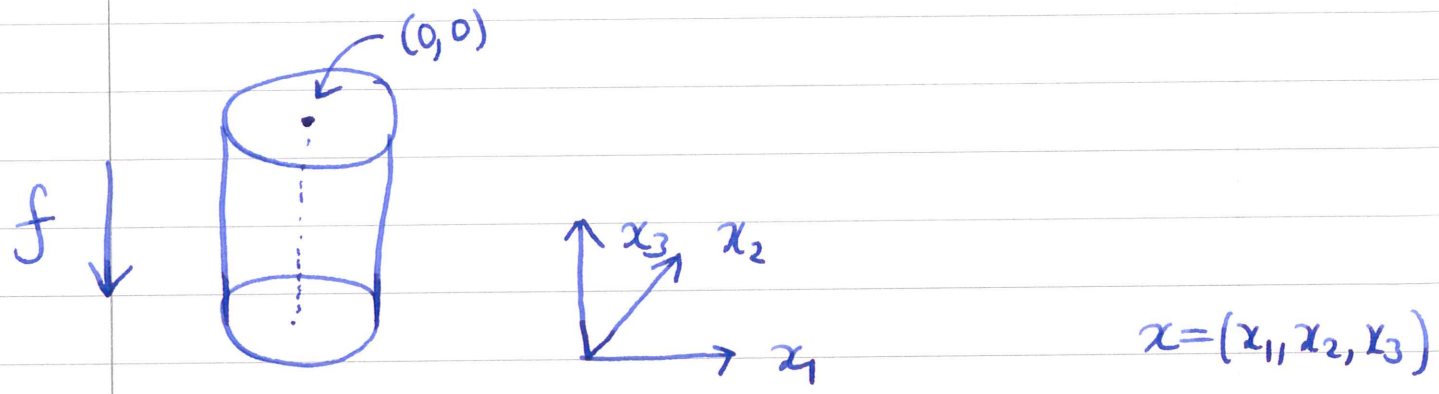
Konklusjoner:

$$u_3(x_3) = -\frac{f_0 g}{(2\mu + \lambda)} x_3 \left(h - \frac{1}{2} x_3 \right)$$

- $x_3 = 0$: $u_3 = 0$
- $x_3 = h$: $u_3(h) = -\frac{f_0 g}{(2\mu + \lambda)} h^2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{f_0 g}{(2\mu + \lambda)} \frac{h^2}{2}$
- $u_3(x_3) < 0 \forall x_3 \Leftrightarrow u_3$ kompresjon

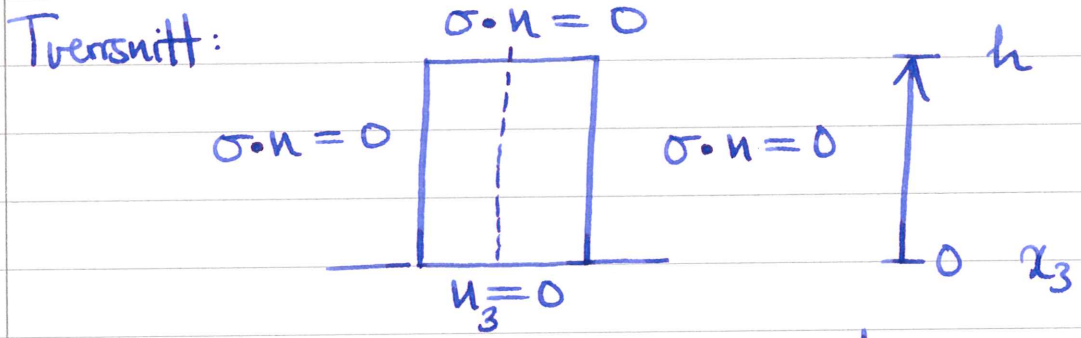


(2) Case B: Skiver - fri setning



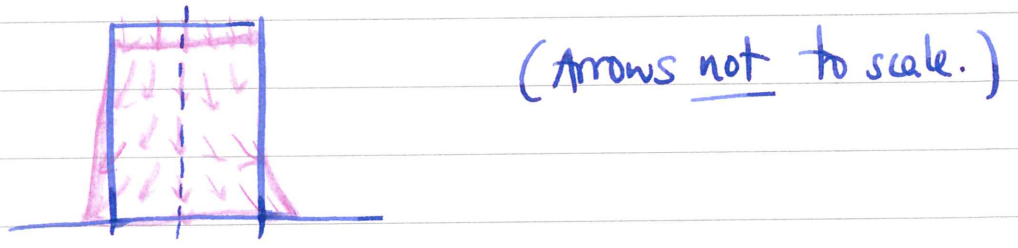
Anta at vi igjen har et elastisk legeme (isotrop, lin. elast. etc.) som virkes på av en tyngdekraft $f = (0,0,-f_0g)$.

Men nå, hva skjer hvis du ikke lenger antar at det er faste vegger på sidene?

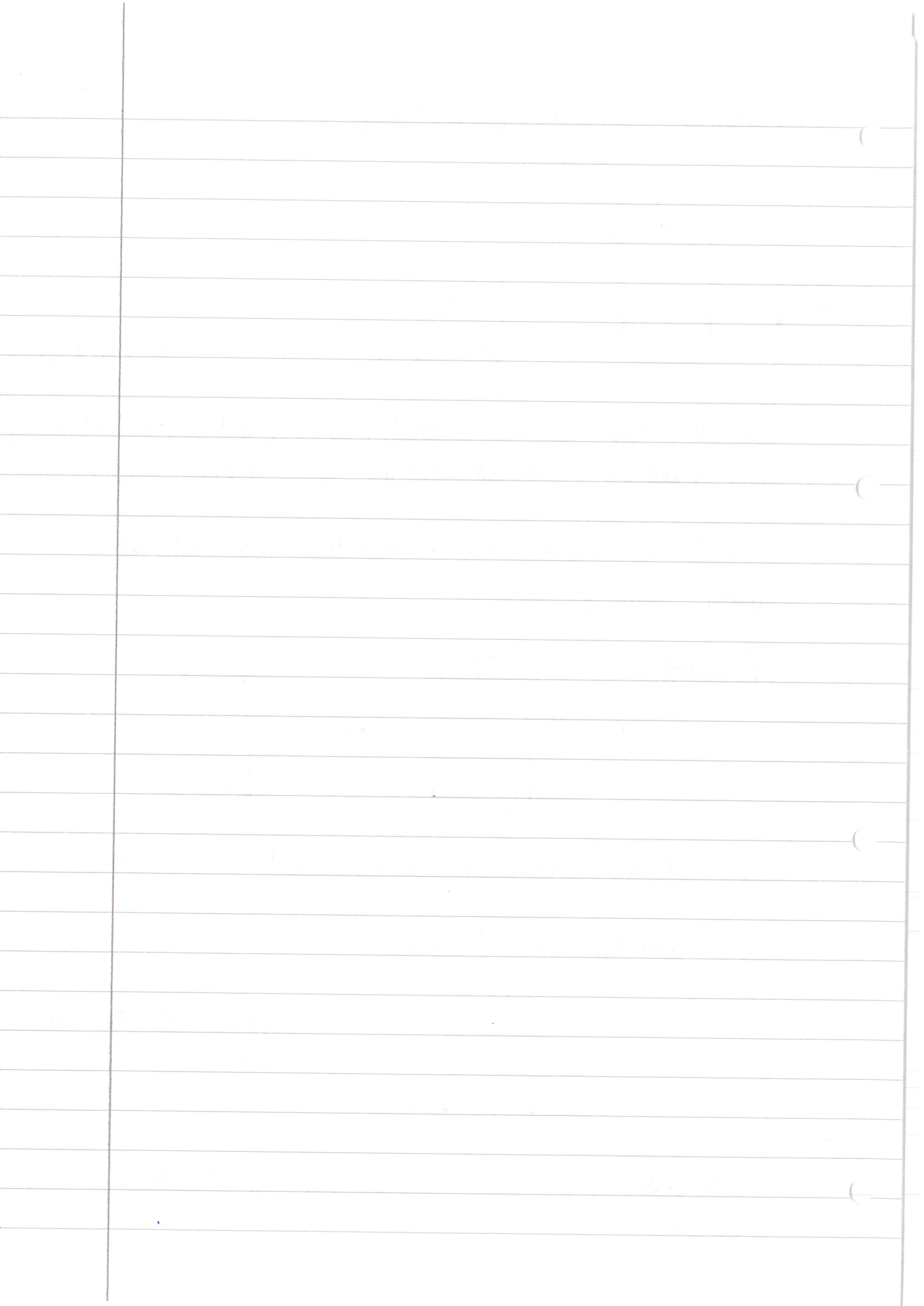


Q: Skisser forventet forskyvning! (3 min)

A: Kanskje noe sånn dette?



La oss prøve å finne en analytisk løsning til dette problemet!



(5)

Men obs: Det finnes ingen analytisk løsning!
 OK, vi gir ikke opp -- la oss forsøke å finne en analytisk løsning til et litt annet problem

(NB: Dette er ikke en god ide å gjøre på oppgavene til eksamen :))

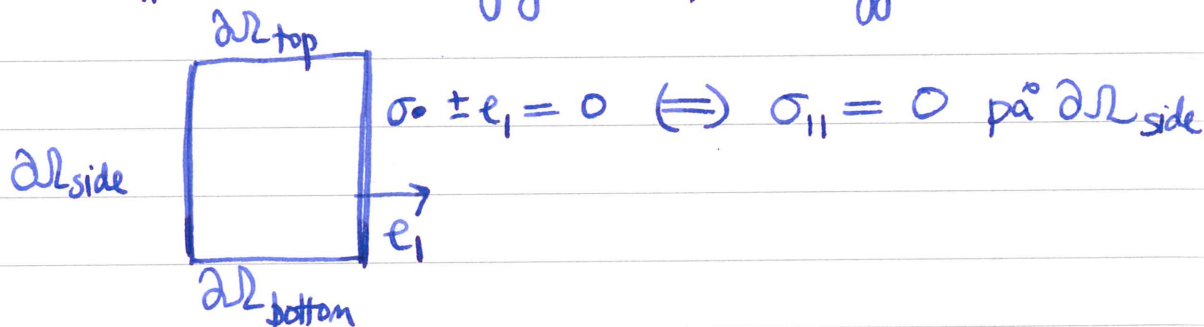
La oss prøve å finne et "løsning" med null skjærespenninger:

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 \quad \forall x$$

Da vil $-\text{div } \sigma_i = f_i \quad g_i: \quad (i=1,2,3)$

$$(i) \quad -\frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{11} = 0 \quad (ii) \quad -\frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{22} = 0 \quad (iii) \quad -\frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{33} = -f \cdot g$$

(i) gir at σ_{11} ikke er avhengig av x_1 . I tillegg så vil



this også $\sigma_{11}(x) = \sigma_{11}(x_1) \Rightarrow \sigma_{11} = 0 \quad \forall x$

(ii) Samme argument for $\sigma_{22} \Rightarrow \sigma_{22} = 0 \quad \forall x$

(iii) gir at

$$\sigma_{33}(1/2) - \overset{0}{\sigma_{33}(h)} = \int_h^z \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{33} dx_3 = -f \cdot g(h-z)$$

(d.c.)

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial}{\partial x_1} u_1(x_1, x_2, x_3) \\
 u_1(b, x_2, x_3) - u_1(a, x_2, x_3) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_1} u_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 \\
 &= \int_a^b \varepsilon_{11} dx_1 \\
 u_1(x_1, x_2, x_3) &= \int_a^{x_1} \varepsilon_{11} dx_1 + u_1(a, x_2, x_3)
 \end{aligned}$$

(6)

Husk inverse Hooke:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu} \left[\overset{\frac{1+\nu}{E}}{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda} \overset{\frac{\nu}{E}}{\text{tr } \sigma} \mathbf{I} \right]$$

Alle skjær tøyninger blir null: fordi for $i \neq j$:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} = 0$$

For "normal" tøyningene får vi:

$$\varepsilon_{11} = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33}$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{11}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} = \frac{1}{E} \sigma_{33}$$

Med andre ord, når vi setter inn for σ_{33} :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{\nu}{E} f \circ g (h - x_3)$$

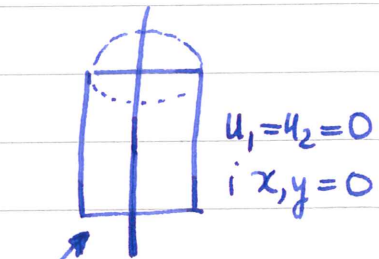
$$\varepsilon_{33} = -\frac{f \circ g}{E} (h - x_3)$$

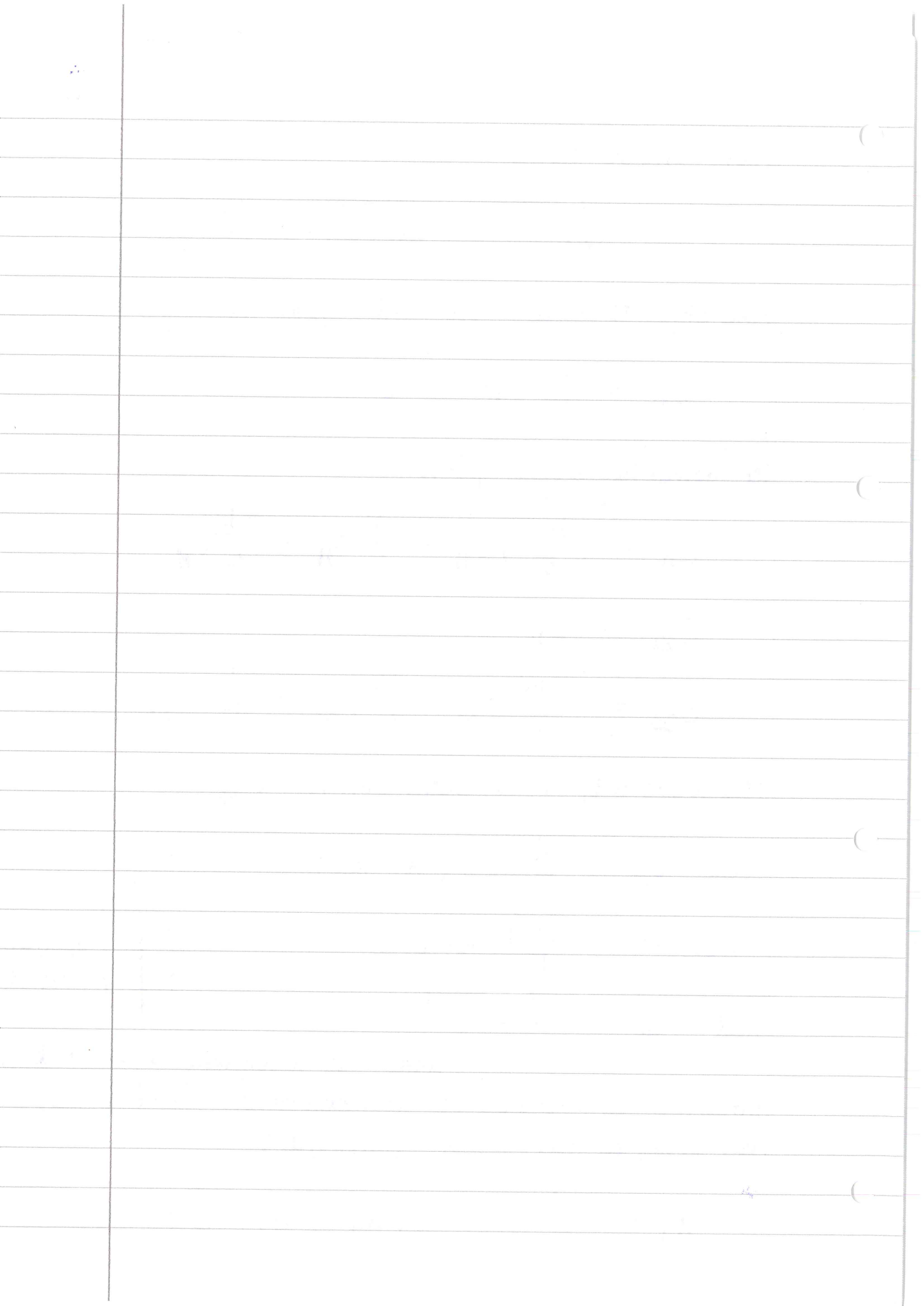
$$\text{Kall } D = \left(\frac{f \circ g}{E} \right)^{-1}$$

antar null forskyning on midtaksen

Integrerer og ~~utnytter~~ ~~randbetingelser~~ på $\partial \Omega$ sider som vanlig og får: $u = (u_1, u_2, u_3)$

$$u_1 = \frac{\nu}{D} (h - x_3) x_1, \quad u_2 = \frac{\nu}{D} (h - x_3) x_2$$





For

$$u_3(x_3) = -\frac{1}{D} (hx_3 - \frac{1}{2}x_3^2) + \tilde{u}_3(x_1, x_2)$$

hvis $u_3 = 0$ nær $x_3 = 0$ skal gjelde, så må $\tilde{u}_3 = 0$.

Men dette vil ikke være kompatibelt med antagelsen om null skjærspenninger!

F.eks:

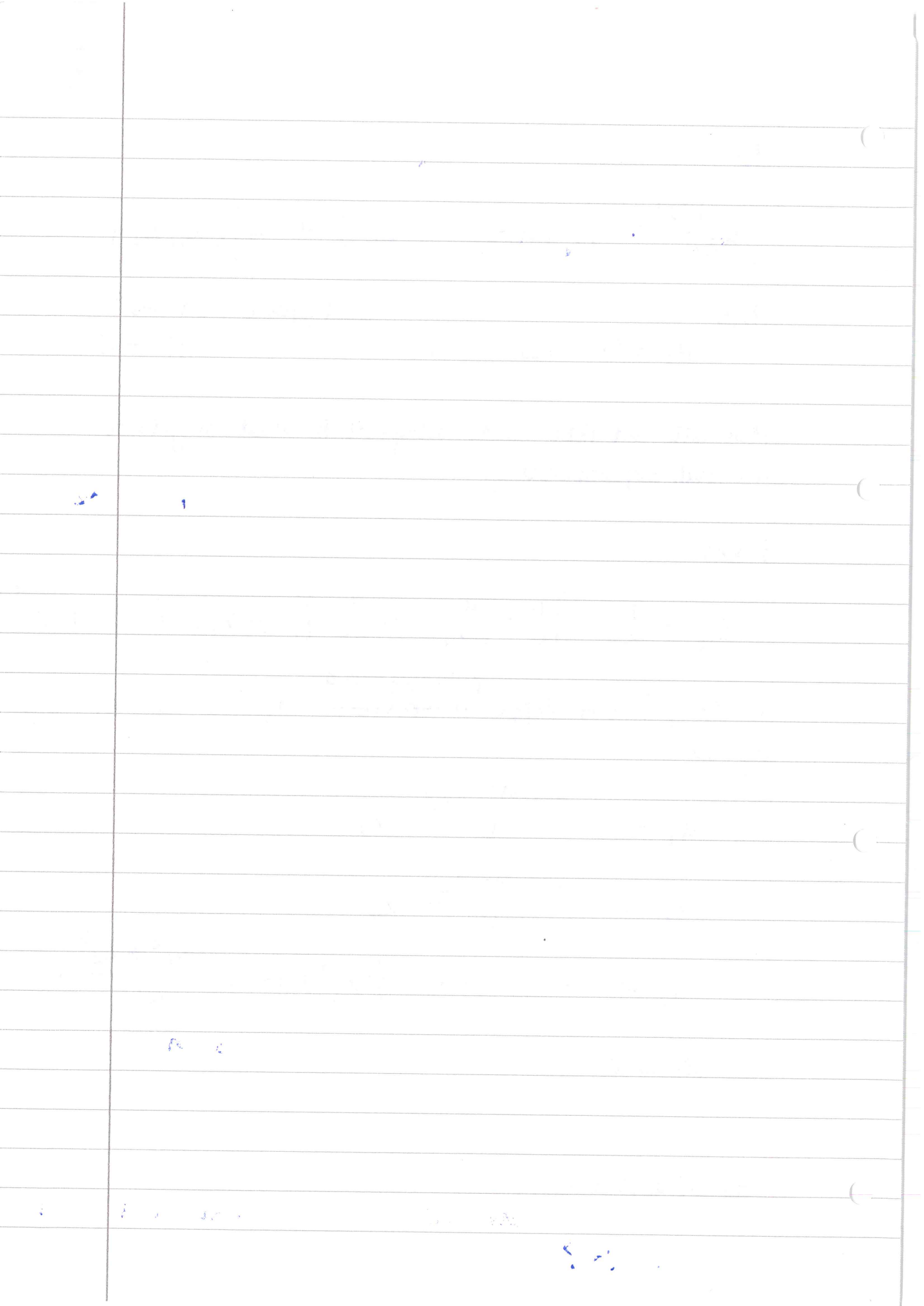
$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{v}{D} (-x_1) + 0 \neq 0!$$

I stedet, kan vi slippe ~~antagelsen~~ ^{betingelsen} $u_3 = 0$ nær $x_3 = 0$, og få:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{v(h-x_3)}{D} x_1 \\
 u_2 &= \frac{v(h-x_3)}{D} x_2 \\
 u_3 &= -\frac{1}{D} (hx_3 - \frac{1}{2}x_3^2) + v \frac{x_1^2 + x_2^2}{2D} + K
 \end{aligned}$$

for vilkårlig K

Numerikk eksempel.



9.3 Bøying av bjelker

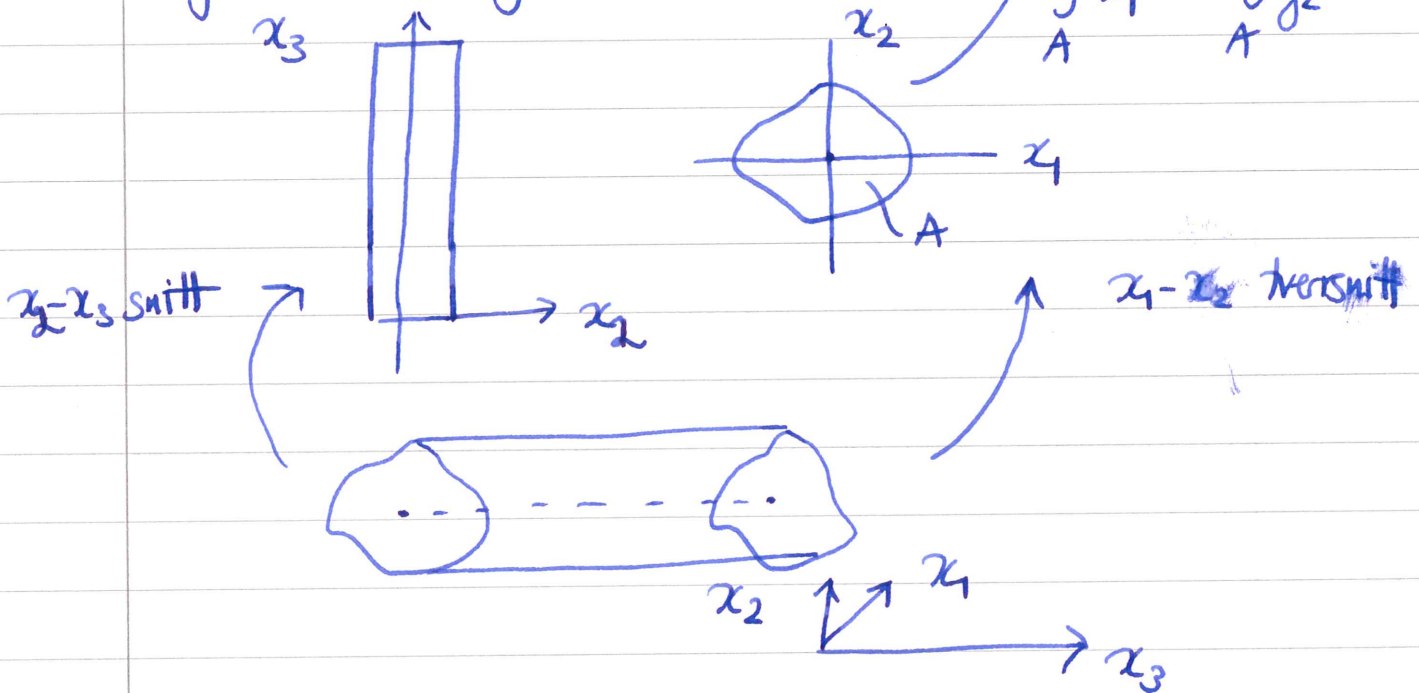
Definisjon: Bjelke (elastisk)

Før et legeme skal betegnes som en bjelke, så antar vi at det er homogent og isotropt og består av en hurt av rette parallelle linjer (stråler), slik at alle tverrsnitt er "like".

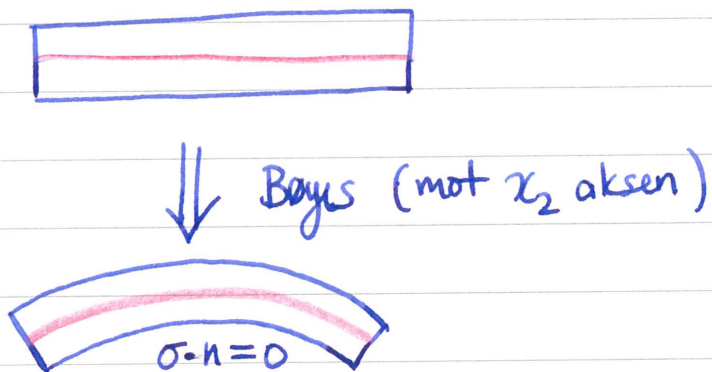
Valg av koordinatsystem:

Velg $(0,0,x_3)$ slik at

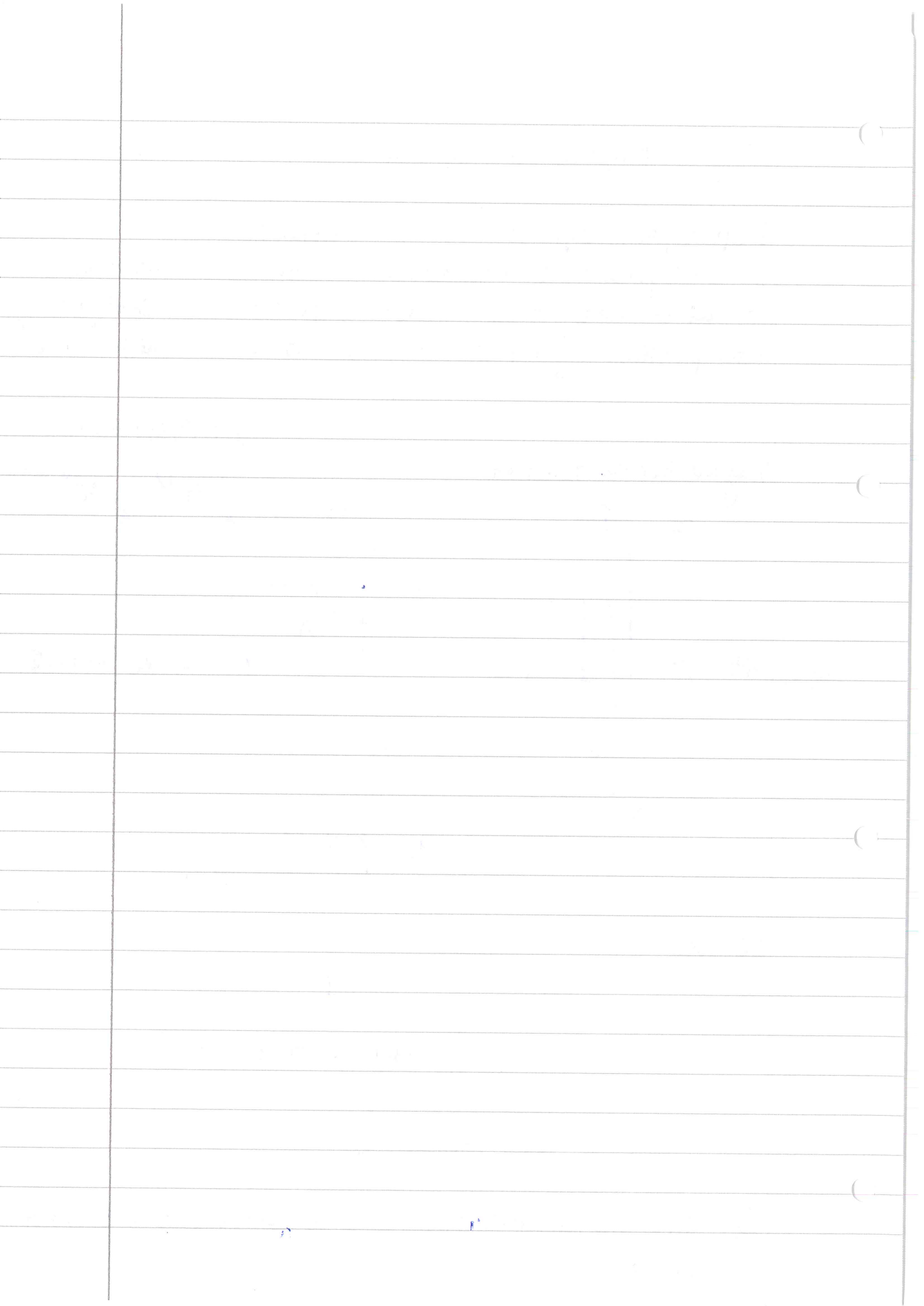
$$\int_A x_1 dA = \int_A x_2 dA = 0$$



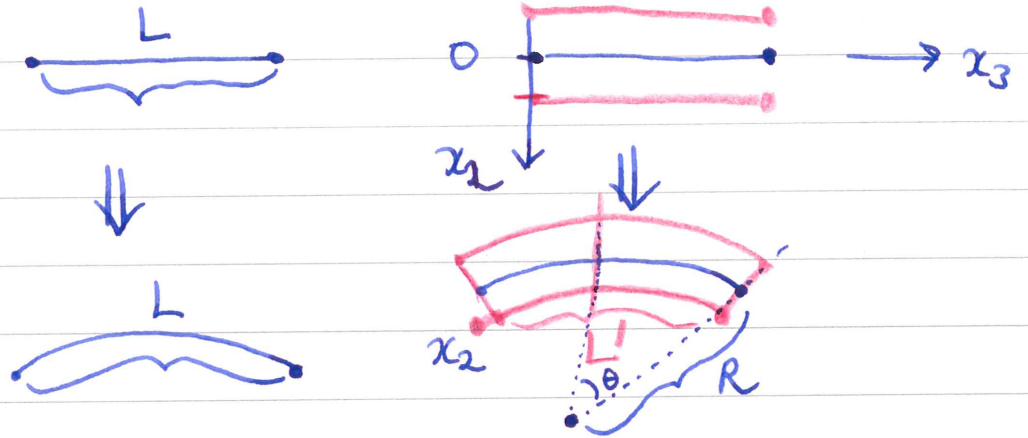
Scenario:



Q: Hvordan beskrive tøyningene og spennningene i et slikt scenario?



(9)



Anta at midtstrengen starter (og slutter) med lengde L , men deformeres til å denne et segment av en sirkel med radius R

Da vil en stråle i posisjon x_2 endre sin lengde til L' der L' er slik at

$$\frac{R - x_2}{L'} = \frac{R}{L} \Rightarrow \frac{L'}{L} = 1 - \frac{x_2}{R}$$

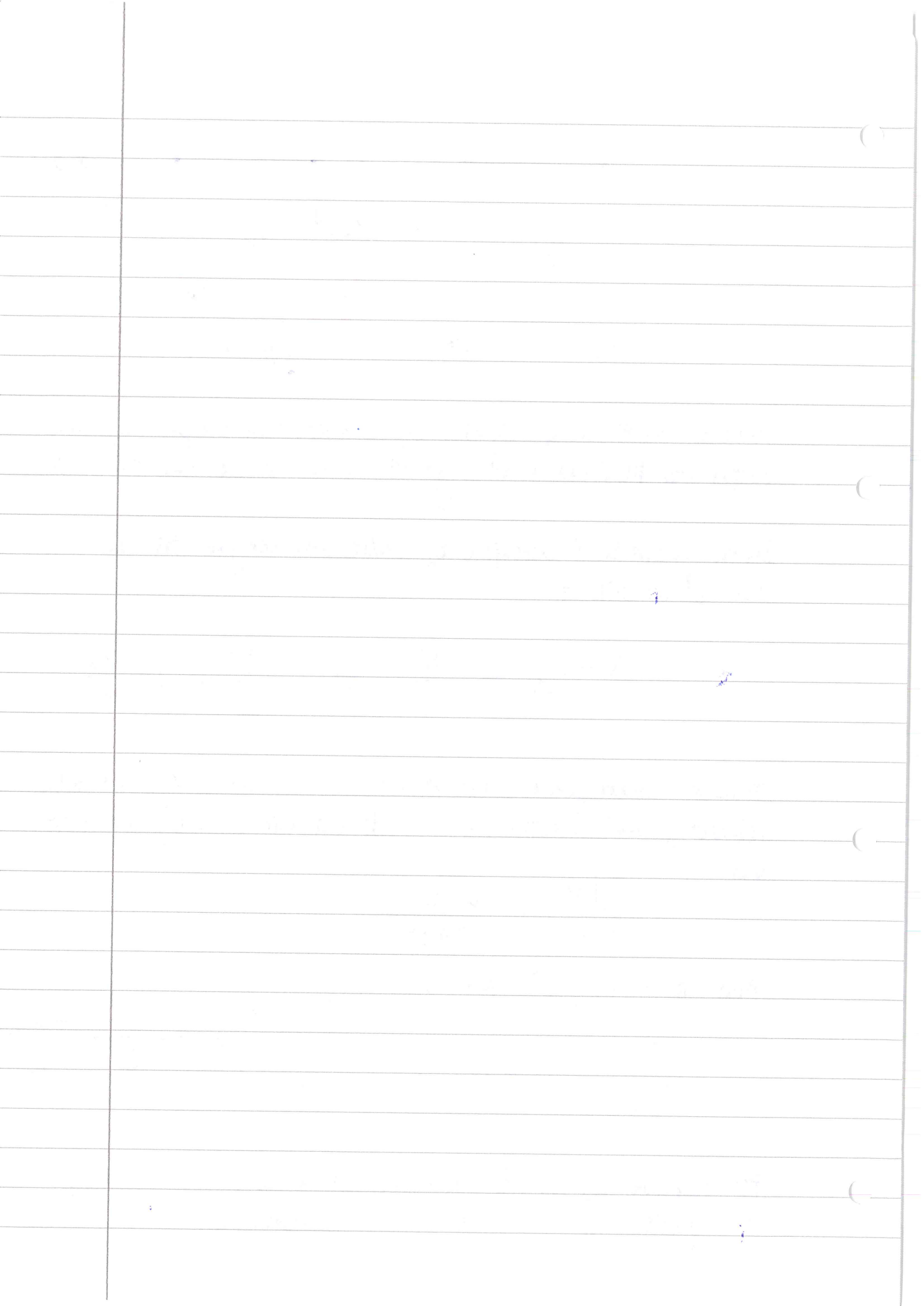
Husk at endringen i lengden av en materialretning (i dette tilfellet, materialretningen er gitt ved vår stråle) er gitt ved

$$\frac{\delta |a|}{|a|} = \frac{a^T \varepsilon a}{\|a\|^2}$$

Med $a = e_3$, så får vi

$$\frac{\delta L}{L} = \varepsilon_{33} = \frac{L' - L}{L} = -1 + \frac{L'}{L} = -\frac{x_2}{R}$$

Før negative x_2 så vil materialet strekkes i x_3 -retning,
 — positive x_2 — " — komprimeres.



(10)

Før at trykningene skal være små (slik at antagelsen om linearitet holder) så må

$$|x_2| \ll R \quad \forall x_2 \in \Omega$$

Antagelse: Null skjærspenninger. $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$

Da har vi fra $-\text{div } \sigma = f$ og $\sigma \cdot n = 0$ på sidene at:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$$

(som i forrige eksempel!)

Mens: $\sigma_{33} = E \varepsilon_{33}$

Hooke's lov gir: (invers) er:

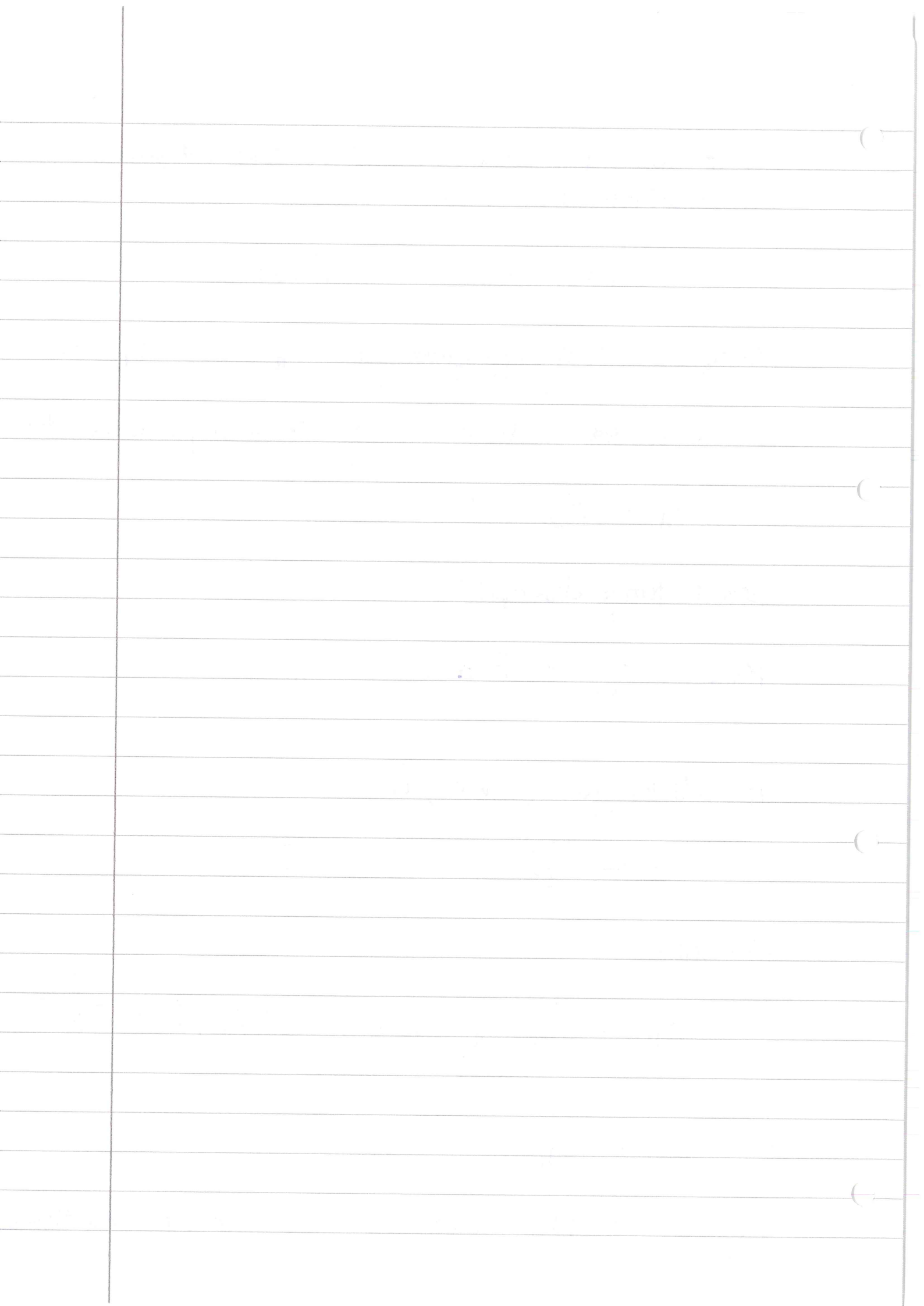
$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr} \sigma I$$

som gir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} \\ &= -\nu \varepsilon_{33} = \nu \frac{x_2}{R} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{11}$$

$\varepsilon_{ij} = 0$ for $i \neq j$ siden $\sigma_{ij} = 0$ for $i \neq j$ ved Hooke



Med andre ord:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\nu \varepsilon_{33} = \nu \frac{x_2}{R}$$

Integrerer og lar midtstrålen være "utstøkket" (bare bøyd), så finner vi at

$$u_1 = \nu \frac{x_1 x_2}{R}$$

$$u_2 = \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2R} + \frac{x_3^2}{2R} \quad (*)$$

$$u_3 = -\frac{x_2 x_3}{R}$$

der uttrykket for u_2 kommer fra skjærfri antagelsen!

Exercise: Sjekk at forskyvningen gitt ved (*) er skjærtøyningfri.

Answer:

Q: Når er spenningene størst?

Total kraft og totalt kraftmoment

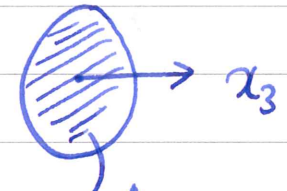
Den eneste ikke-null spenningskomponenten er gitt ved

$$\sigma_{33} = E\varepsilon_{33} = -\frac{E}{R}x_2$$

Den totale kraften som virker på et vilkårlig tverrsnitt A er gitt ved (ved definisjon)

$$F_3 = \int_A \sigma_{33} ds = -\frac{E}{R} \int_A x_2 ds = 0$$

Definer kraftmomentene:



$$M_1 = \int_A x_2 \sigma_{33} dA = -\frac{E}{R} \int_A x_2^2 dA$$

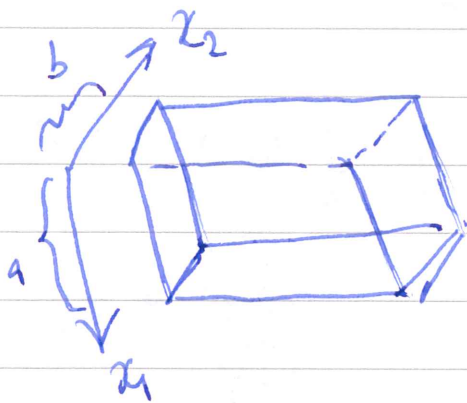
$$M_2 = \int_A x_1 \sigma_{33} dA = -\frac{E}{R} \int_A x_1 x_2 dA$$

Definisjon: Bøyemoment M_1 kalles bøyemomentet.

Merk at M_2 er null luss $\int_A x_1 x_2 dA$.

rektangulær

Q: Hvis du har en bjælke med tværsnitt $[-a, a] \times [b, b]$ i $x_1 - x_2$ -retning. Hvilken retning (av x_1 / x_2) vil du bøjge bjælken i (for a ikke mindst / tænge mindst) kraft)?



Euler - Bernoullis lov

La størrelsen på bøjemomentet skrives som M_b :

$$M_b = |M_x|$$

Davil

$$M_b = \frac{E}{R} I$$

Dette er Euler-Bernoullis lov og EI kaldes bøjestivheden til bjelken.

$$\text{Der } I = \int_A x_2^2 dA$$

Jo højere EI (Pa m^4), jo højere moment kræves for at bøje til en gitt "radius".

Eksempler:

(1) Regn ud bøjemomentet til en rektangulær bjelke (med tværsnitt $2a \times 2b$):

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b x_2^2 dy dx = \int_{-a}^a \left| \frac{1}{3} x_2^3 \right|_{-b}^b dx \\ &= \int_{-a}^a \frac{2}{3} b^3 dx = \left| \frac{2}{3} b^3 x \right|_{-a}^a = \frac{4}{3} b^3 a. \end{aligned}$$

(2) For en sirkulær bjelke med radius a så vil

$$I = \iint_A x_2^2 dA = \frac{\pi}{4} a^4$$

Oppgaver; Uke 8:

Regn

- Gå gjennom Eksempel 9.3, 9.4, 9.5

9.5

E8.1:

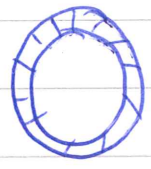
Ikke dette

Anta at du har 1 kg stål, og skal lage en bjelke som er n m lang, som skal tåle mest mulig uten å flyte (eller bryte). Vil du lage en rektangulær, sirkulær eller noe bjelke og hvorfor? (Vis regningen din.)

syndrisk

3) For et rør med indre radius $r = a$ og ytre radius b så vil

$$I = \int_A x_2^2 dA = \frac{\pi}{4} (b^4 - a^4)$$



Flytradius

Hvor langt kan man bøje en bjælke før den bryder evt. "flyter"?

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{R} x_2 \quad -x_2 \leq a$$

$$\max_{x_2} \sigma_{33} = \frac{E}{R} a$$

For $\max_{x_2} \sigma_{33} < \sigma_{yield}$:

$$R > a \frac{E}{\sigma_{yield}}$$

Minste R slik at dette holder kaldes flytradius

For en sirkulær bjælke

$$M_b \leq \frac{\pi}{4} a^3 \sigma_{yield}$$

Største M_b flytmoment

19

1. The first part of the book is devoted to a description of the various forms of the verb 'to be' in English. This is done in a very clear and concise manner, and the reader is able to understand the differences between the different forms of the verb.

2. The second part of the book is devoted to a description of the various forms of the verb 'to have' in English. This is also done in a very clear and concise manner, and the reader is able to understand the differences between the different forms of the verb.

3. The third part of the book is devoted to a description of the various forms of the verb 'to do' in English. This is also done in a very clear and concise manner, and the reader is able to understand the differences between the different forms of the verb.

4. The fourth part of the book is devoted to a description of the various forms of the verb 'to go' in English. This is also done in a very clear and concise manner, and the reader is able to understand the differences between the different forms of the verb.

5. The fifth part of the book is devoted to a description of the various forms of the verb 'to come' in English. This is also done in a very clear and concise manner, and the reader is able to understand the differences between the different forms of the verb.

6. The sixth part of the book is devoted to a description of the various forms of the verb 'to see' in English. This is also done in a very clear and concise manner, and the reader is able to understand the differences between the different forms of the verb.

7. The seventh part of the book is devoted to a description of the various forms of the verb 'to hear' in English. This is also done in a very clear and concise manner, and the reader is able to understand the differences between the different forms of the verb.

8. The eighth part of the book is devoted to a description of the various forms of the verb 'to smell' in English. This is also done in a very clear and concise manner, and the reader is able to understand the differences between the different forms of the verb.

9. The ninth part of the book is devoted to a description of the various forms of the verb 'to taste' in English. This is also done in a very clear and concise manner, and the reader is able to understand the differences between the different forms of the verb.