# Lecture 9: Basic Elastostatics (3 av 3) 19.10.2015

Kapittel 9.4 + 9.6

Oversikt:

(1) Repetisjon fra Lecture 8
(2) Vridning av en stav (9.4)
(3) Trykk i et rør (9.6)

(* Diskuter 5 min repetisjon fra sist med deres nabo.)

## (1) REPETISJON FRA LECTURE 8: *

- I forelesning 8, så fokuserte vi på bøying av bjelker; en bjelke er et homogent, isotropt, lineær elastisk legeme som geometrisk består av en bunt med rette, parallelle stråler, slik at alle tverrsnitt er like.

- Vi viste at for en bjelke med lengderetning langs $x_3$-aksen, som bøyes mot $x_2$-aksen til et segment av en sirkel med radius $R$, så vil, under antagelse om null skjærspenninger, spenningene være gitt ved:

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{R} x_2 \qquad \text{(alle andre 0!)}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \nu \dfrac{x_2}{R} \; ; \; \varepsilon_{33} = -\dfrac{x_2}{R} \\ u_1 = \nu \dfrac{x_1 x_2}{R} \; ; \; u_2 = \nu \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{R} + \dfrac{x_3^2}{2R}, \\ u_3 = -\dfrac{x_2 x_3}{R}. \end{cases}$$

Noen spørsmål fra L8 ?

- Vi introduserte bøyemomentet for en bjelke

$$M_1 = \int_A x_2 \sigma_{33} \, dA = -\frac{E}{R} \int_A x_2^2 \, dA$$

og Euler-Bernoullis lov:

$$\boxed{|M_1| = \frac{E}{R} I}$$

der $I = \int_A x_2^2 \, dA$

---

## Flytradius

Hvor langt kan man bøye en bjelke før den brekker / flyter?

Husk at $\sigma_{33} = -\frac{E x_2}{R}$. Hvis $|x_2| \leq a$, så

vil $\max_{x_2} \sigma_{33} \leq \frac{E a}{R}$

For at $\sigma_{yield} > \max_{x_2} \sigma_{33} \Rightarrow$

$$\boxed{R > a \frac{E}{\sigma_{yield}}} \qquad (*)$$

Minste $R$ slik at $(*)$ holder, kalles flytradius.

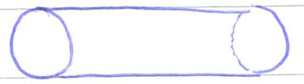
For en sirkulær bjelke: $\boxed{M_b \leq \frac{\pi}{4} a^3 \sigma_{yield}}$

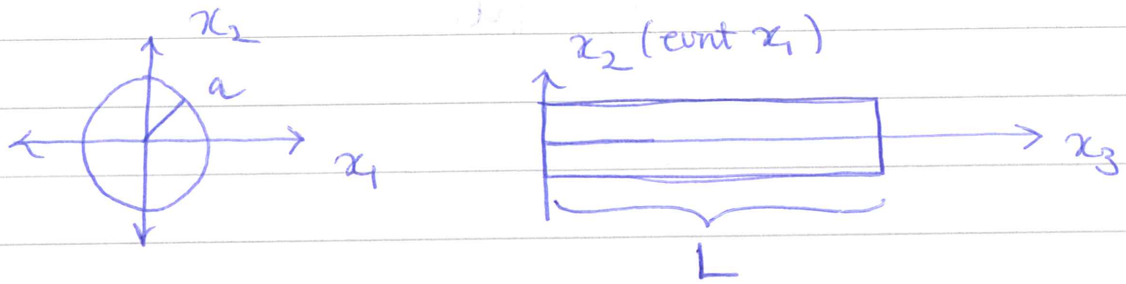
Største $M_b$ slik at $\rightarrow$ $M_b$ holder kalles flytmomentet.

$$e_3 \times x = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

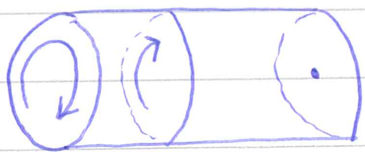
# 9.4 VRIDNING AV EN STAV

La en stav være en bjelke med sirkulert tverrsnitt med radius $a$ og lengderetning gitt ved $x_3$-aksen.

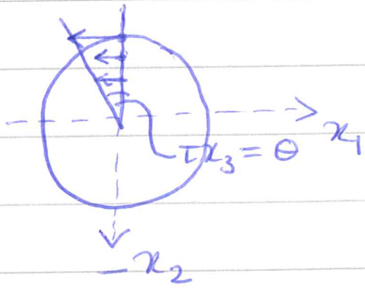





Forestill deg nå at du legger en hånd på hver av endene til staven og vrir. Du kan da forårsake en ren vridning hvis du klarer å deformere staven slik at hvert tverrsnitt er kun rotert med en vinkel $\underbrace{\tau(x_3)}_{= \theta_{x_3}} = \tau \cdot x_3$



Anta at følgende forskyvningsfelt beskriver en ren vridning; så lenge $\tau L \ll 1$,




$$u = \varphi \times x$$

der $\varphi = \tau x_3 e_3$ $\quad e_3 = (0,0,1)$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$$u = \varphi \times x = \tau x_3 \, e_3 \times x = \tau x_3 (-x_2, x_1, 0)$$

$$\|u\|^2 = \tau^2 |x_3|^2 \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \tau^2 |x_3|^2 ( x_1^2 + x_2^2 )$$

$$\leq \tau^2 |x_3|^2 \|a\|^2$$

$$\sigma = \mu \tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Observer at det er 0 deformasjon i lengde retningen, og at $|u| \leq \tau |x_3| |a| \leq \tau L a \leq a$

Anta at staven er lineært elastisk og isotropisk med Lamé parametre $\mu$ og $\lambda$, hva er tøyningene og spenningene?

– Ta 5–10 min og regn selv; diskuter svarene; så går jeg gjennom:

$$\nabla u^T_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} u_j = \begin{pmatrix} 0 & -\tau x_3 & -\tau x_2 \\ +\tau x_3 & 0 & \tau x_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\tau x_2}{2} \\ 0 & 0 & \tau x_1/2 \\ -\frac{\tau x_2}{2} & \tau x_1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\varepsilon_{13} = -\tau x_2/2 \qquad \varepsilon_{23} = \tau x_1/2 \qquad \varepsilon_{ii} = 0 \; i=1,2,3 \qquad \varepsilon_{12} = 0}$$

Fra Hooke's lov: $\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \operatorname{tr} \varepsilon I$

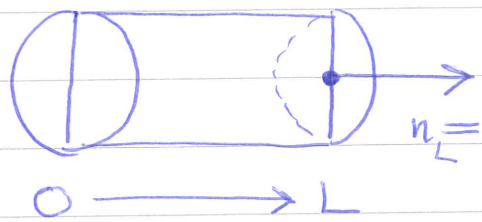
får vi at

$$(\operatorname{tr} \varepsilon = 0)$$

$$\boxed{\sigma_{13} = \sigma_{31} = -\mu\tau x_2 \qquad \sigma_{32} = \sigma_{23} = \mu\tau x_1}$$

Merk at $\operatorname{div} \sigma = (0,0,0) \longrightarrow$ OK! (i likevekt)

## Hva skjer på endene (der $x_3 = 0$ eller $x_3 = L$)?




$n_L = (0,0,1) = e_3$

$$\sigma \cdot n_L = \sum_j \sigma_{ij} n_{L_j} = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})$$

$$= (-\mu\tau x_2, \mu\tau x_1, 0) = \mu\tau(-x_2, x_1, 0)$$

Må legge på riktig kraft på endene der $x_3 = 0$ og $L$

## Hva skjer på sidene der $x_1^2 + x_2^2 = a^2$?

På sidene der $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ så er normalen gitt ved

$$n_s = (x_1, x_2, 0)$$

$$\sigma \cdot n_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\tau x_2\mu \\ 0 & 0 & \mu\tau x_1 \\ -\tau\mu x_2 & \mu\tau x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha = 0 \end{pmatrix}$$

where $\alpha = -\tau\mu x_2 x_1 + \mu\tau x_1 x_2 = 0$

$\sigma \cdot n_s = 0$ på sidene.

Merk at

$$x \times \sigma \cdot e_3 = x \times (\mu\tau(-x_2, x_1, 0))$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_1 \\ \mu\tau(-x_2) & \mu\tau x_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu\tau x_1^2 \\ -\mu\tau x_1 x_2 \\ \mu\tau x_1^2 + \mu\tau x_2^2 \end{pmatrix}$$

# Torque / Dreiemoment

**Definisjon:** Torque / Dreiemoment

Det totale kraftmomentet om lengdeaksen i et tverrsnitt kalles dreiemomentet og er gitt ved

$$\left( dM = x \times dF = x \times \sigma \cdot e_3 \right)$$

$$M_3 = \int_A (x \times \sigma \cdot e_3)_3 \, dA$$

$$= \mu \tau \int_A (x_1^2 + x_2^2) \, dA$$

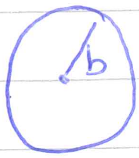
Generelt så kan alltid dreiemomentet $M_t = M_3$ skrives som

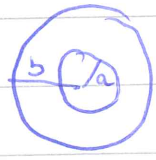
Coulumb–Saint-Venant's lov

$$\boxed{M_t = \mu \tau \mathcal{J}}$$

der
$$\mathcal{J} = \int_A x_1^2 + x_2^2 \, dA = \begin{cases} \frac{\pi}{2} b^4 & (\text{stav}) \\ \frac{\pi}{2}(b^4 - a^4) & (\text{rør}) \end{cases}$$

for en stav med radius b og et rør med ytre radius b og indre radius a


Stav


Rør

**Definisjon:**

$\mu \tau \mathcal{J}$ kalles dreiestivhe[ten] til en bjelke

$$\alpha \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu\tau = \mu\tau\alpha \begin{vmatrix} i & j & k \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \mu\tau\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} i & j & k \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} x_1 \sigma_{33} \\ -(-x_2 \sigma_{33}) \\ -x_2 \sigma_{23} - x_1 \sigma_{13} \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \alpha \left( -x_2 \sigma_{13} + x_1 \sigma_{23} \right)$$

## Effekt og energi ved vridning

Anta at staven har en konstant angulær fart $\alpha$; da vil hastighetsfeltet være gitt ved:

$$v(x) = \alpha\, e_3 \times x = \alpha(-x_2, x_1, 0)$$

Skjærkreftene som virker på et tverrsnitt med normal $e_3$ vil overføre en effekt (arbeid per tidsenhet) på

$$\boxed{P = \left(\int_A v \cdot \sigma \cdot e_3 \, dA\right)_3 = \int_A \alpha(-x_2\sigma_{13} + x_1\sigma_{23})\, dA = \alpha M_3}$$

(NB uavhengig av formen på $\sigma$!)

Eksempel 9.6 → + Exercise 9.8*
—||— 9.9, 9.10 Oppgave uke 9.

$$E = \int_{\cancel{A}} \frac{1}{2}\sigma : \varepsilon = \int_{\cancel{A}} \frac{1}{2}\mu\tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} : \frac{\tau}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \int_A \frac{1}{2}\mu\tau \cdot \frac{\tau}{2}\left(x_2^2 \cdot 2 + x_1^2 \cdot 2\right)$$

$$= \int_A \frac{1}{2}\mu\tau^2(x_1^2 + x_2^2) = \int_\Omega \frac{1}{2}\mu\tau^2 J$$

$$\boxed{E_l = \int_A \frac{1}{2}\sigma : \varepsilon \, dA = \frac{1}{2}\mu\tau^2 J}$$

Den elastiske energien i en ren vridning er gitt ved per tverrsnitt.

Total over hele staven blir

$$E = \int_0^L \int_A \frac{1}{2}\sigma : \varepsilon \, dA = \frac{1}{2}\mu\tau^2 J \cdot L$$

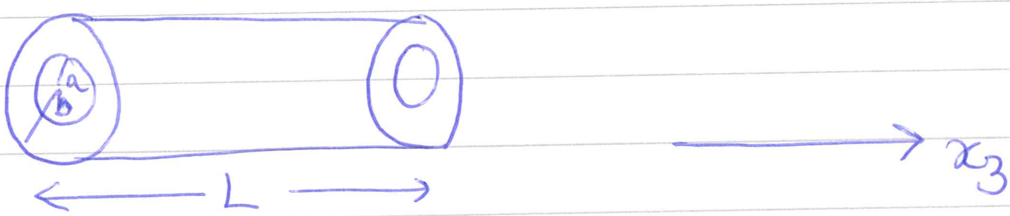
## 9.6 Trykk i rør

Rør under trykk er et viktig anvendelsesfelt. Klassiske spørsmål er

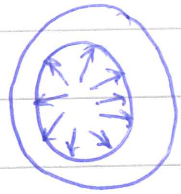
(i) Hvor mye og hvor vil et rør utvide seg under trykk?

(ii) Hva er spenningene i legemet og når og hvor vil det knekke?

Vi ser på følgende scenario: en sylinder med indre radius a, ytre radius b og lengde L




Vi lar $x_3$-aksen være parallell med rørets lengde-retning. Anta at det virker et uniformt trykk på røret "innenifra"

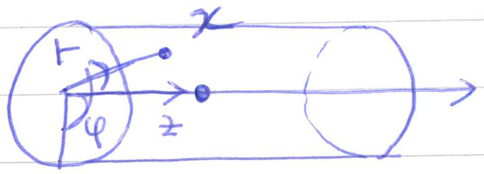


Forventer at røret utvider seg i radiell retning (og også trekker seg sammen i lengderetning, men la oss foreløbig se bort fra dette ved å sette røret fast i endene.)

$$u = u_r(r)\, e_r$$

der $e_r = (x_1, x_2, 0) \cdot \frac{1}{r}$ $\qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2$

Bruker sylinder koordinater $(r, \varphi, z) = x$




Der $e_r = \frac{1}{r}(x, y, 0)$, $e_\varphi = \frac{1}{r}(-y, x, 0)$
$e_z = (0, 0, 1)$

der $r^2 = x^2 + y^2$

Vi kan se at

$$\boxed{u = \underbrace{u_r(r)}_{=\frac{\partial \psi}{\partial r}(r)} \overbrace{e_r}^{=\nabla r} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \nabla r = \nabla \psi(r)}$$

der altså $\frac{\partial \psi}{\partial r}(r) = u_r(r) \iff \psi(r) = \int u_r(r)\, dr$

Husk Navier – Cauchy's ligning

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) = -f \qquad (1)$$

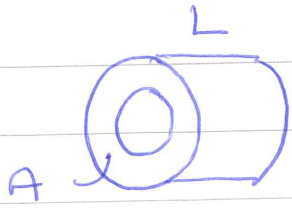
der $\Delta u = \Delta u_i = \overset{\nabla\cdot}{\text{div}}\ \overset{\nabla}{\text{grad}}\ u_i$. Når $u = \nabla \psi$

$$\Delta u = \Delta \nabla \psi = \nabla \cancel{\Delta \psi} = \nabla \overset{\nabla\cdot}{\cancel{\text{div}}}\, u$$

(1) reduseres da til

$$(2\mu + \lambda) \nabla \nabla \cdot u = -f$$

$\nabla \cdot u(r)$




$$2\pi r \, L \, u_r(r) = \int_A u \cdot n \, dA = \int_V \nabla \cdot u \, d\tau$$

$$= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^r \nabla \cdot u \, dr \, d\varphi \, dz$$

$$= 2\pi r L \int_0^r \nabla \cdot u \, dr$$

$$\int_0^r r \nabla \cdot u \, dr = r u_r$$

$$r \nabla \cdot u = \frac{d}{dr}(r u_r) = u_r + r u_r'$$

$$\nabla \cdot u = \frac{u_r}{r} + u_r'$$

Yielding

$$\boxed{(\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr}\left( \frac{1}{r} \frac{d(r u_r)}{dr} \right) = -f_r}$$

Likevektslignung i ren radiell forskyvning.

$$\frac{d}{dr}$$

$v$

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{R}\frac{d(r u_r)}{dr} = \frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(Ar^2 + B\right)$$

$$= \frac{d}{dr}\frac{1}{r}2Ar = \frac{d}{dr}2A = 0$$

Can show that

$$\nabla u = \frac{\partial u_r}{dr} e_r \otimes e_r + \frac{u_r}{r} e_\varphi \otimes e_\varphi \qquad (*)$$

Merk at tensor produktet $a \otimes b$ er gitt ved
$a \otimes b = \{a_i b_j\}_{ij}$

Siden $(*)$ er symmetrisk, så vil

$$\varepsilon = \overbrace{\frac{du_r}{dr}}^{= \varepsilon_{rr}} e_r \otimes e_r + \overbrace{\frac{u_r}{r}}^{= \varepsilon_{\varphi\varphi}} e_\varphi \otimes e_\varphi$$

Fra Hooke's lov følger det at

$$\sigma_{rr} = 2\mu \varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi})$$
$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu \varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi})$$
$$\sigma_{zz} = \lambda \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$$

der $\operatorname{tr} \varepsilon = \varepsilon_{rr} + \frac{u_r}{r} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$

Case 1: Ingen volum krefter $(f_r = 0)$

$u_r = Ar + \frac{B}{r}$ løser likevektsligningen

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = A - Br^{-2}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = A + Br^2$$

$$\sigma_{rr} = 2A(\lambda+\mu) - \frac{2}{r^2}\mu B$$

$$\boxed{u_r(r) = (1+\nu)\frac{a^2}{b^2-a^2}\left((1-2\nu)r + \frac{b^2}{r}\right)\frac{P}{E}}$$

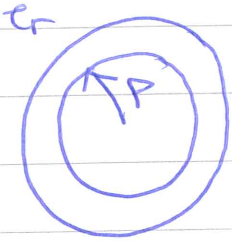
$\frac{P}{E}$ gir røft estimat på størrelsen på tøyningen

$\nu \in (0, 1/2)$:

$\varepsilon_{rr} < 0$ [Kompresjon i $r$-retning]

$\varepsilon_{\varphi\varphi} > 0$ [Expansion i $\varphi$-retning]

Kan vise at for et trykk $P$ som virker i retning $e_r$, dvs $-P$ i retning $n = -e_r$




Så er

$$u_r(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

der

$$A = \frac{a^2}{b^2-a^2}\,\frac{P}{2(\lambda+\mu)}$$

$$B = \frac{a^2 b^2}{b^2-a^2}\,\frac{P}{2\mu} \qquad B \geq A$$

## Observasjoner

- $u_r(r) > 0$ og monotont synkende for $a \leq r \leq b$ dvs max når $r = a$.

Tøyningstensoren er altså

$$\varepsilon_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi} = A + \frac{B}{r^2}$$

eller ved bruk av Young's modulus og Poisson's ratio:

$$\varepsilon_{rr} = (1+\nu)\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1-2\nu-\frac{b^2}{r^2}\right)\frac{P}{E}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = (1+\nu)\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1-2\nu+\frac{b^2}{r^2}\right)\frac{P}{E}$$

For spenningstensoren får vi

$$\sigma_{rr} = -\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right)P$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{a^2}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2}{r^2}+1\right)P$$

$$\sigma_{zz} = 2\nu\frac{a^2}{b^2-a^2}P$$

Det radielle trykket

$$p_r = -\sigma_{rr} < P$$

siden $\frac{b^2-r^2}{r^2}\cdot\frac{a^2}{b^2-a^2} = \frac{b^2-r^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{a^2}{r^2} < 1$

$p_\varphi = -\sigma_{\varphi\varphi}$ og $p_z = -\sigma_{zz}$ er

negative (strekkspenninger).

$$p = p_r + p_\varphi + p_r = -\frac{2}{3}(1+\nu)\frac{a^2}{b^2-a^2}P$$

Q: Maksimal strekkspenning (fører gjenne til brudd)

$$\boxed{\sigma_{\varphi\varphi}(r=a) = \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}P}$$