UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK2500 — Solid mechanics
Eksamensdag:	Prøveeksamen 2015
Tid for eksamen:	00.00 – 04.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann's og godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 20%)

Denne oppgaven består av 5 spørsmål som er uavhengige av hverandre. Hvert spørsmål gir maksimalt to poeng. Begrunn svarene dine der det er relevant.

a) (2 poeng) Uttrykk Cauchy's infinitesimale tøyningstensor ε for en deformasjon f av et område Ω med Kartesiske koordinater x.

b) (2 poeng) Hva er SI enheten for tøyning?

c) (2 poeng) Hva er definisjonen av spenning og hva er dens SI enhet?

d) (2 poeng) Definer strekkstyrken til et elastisk materiale.

e) (2 poeng) Hva er de naturlige begrensningene for Poisson's ratio ν? Hvis et legeme (f.eks en kule) har Poisson's ratio større enn den naturlige øvre grensen, hvordan vil legemet deformes når et trykk påføres legemets ytre rand?

Oppgave 2 (vekt 40%)

Anta at et elastisk legeme B fyller et område $\Omega \subset R^3$, med Kartesiske koordinater $x = (x_1, x_2, x_3)$. Anta at legemet deformeres via en deformasjon f gitt ved:

$$f(x) = ((\kappa_1 + 1)x_1, (\kappa_2 + 1)x_2, x_3) \tag{1}$$

for reelle, positive konstanter κ_1, κ_2. La Frobenius normen til en $n \times n$ matrise A skrives som $\|A\|$ med

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \tag{2}$$

a) (5 poeng) Gi ett uttrykk for invers deformasjonen $g = f^{-1}$ som mapper et punkt $y \in f(\Omega)$ til $x \in \Omega$.

(Fortsettes på side 2.)

b) (5 poeng) Beregn forskyvningen $u = u(x)$ av legemet B og Cauchy's infinitesimale tøyningstensor ε assosiert med u.

c) (5 poeng) Beregn hovedtøyningene og hovedtøyningsretningene assosiert med ε. Gi en skarp betingelse på κ_1, κ_2 som garanterer at den største hovedtøyningen er mindre enn 1%.

d) (5 poeng) Beregn Cauchy's spenningstensor for legemet, under antagelsen om at legemet er isotropt, homogent og lineært elastisk med Lamé parametre $\mu = 2.0$ MPa, $\lambda = 100.0$ MPa.

Oppgave 3 (vekt 40%)

Anta sakte varierende forskyvninger og gjør ikke forskjell på Euler og Lagrange representasjon i denne oppgaven.

Vi ser på et to-dimensjonalt, rektangulært legeme A av lengde a (m) og høyde b (m) med Kartesiske koordinater $(x_1, x_2) \in [0, a] \times [0, b]$.

- Anta at legemet er isotropt og homogent med Lamé parametre μ og λ og tetthet ρ.
- Anta at legemet holdes fast i endene der $x_1 = 0$ eller $x_1 = a$ (og $x_1 \in [0, b]$), altså at forskyvningen $u = (0, 0)$ her.
- Anta at en konstant volumkraft f virker nedover i legemet, slik at $f = (0, -g)$ for en konstant g (N/m^d)) $d = 2$.

Bruk denne settingen for deloppgavene under.

a) (5 poeng) Uttrykk de dynamiske elastisitetsligningene som beskriver forskyvningen $u = u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$ av et homogent, isotropt, lineær elastisk legeme med Kartesiske koordinater $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in (0, T)$, Lamé parametre μ og λ, tetthet ρ og en gitt volumkraft f.

b) (5 poeng) Anta at legemet er i mekanisk likevekt og at det ikke virker noen normal spenninger i planene definert via koordinataksene. (Det kan være skjærspenninger.) Beregn spenningstensoren σ under antagelsene over.

c) (5 poeng) Bruk (b) og beregn tøyningstensoren som en funksjon av g, μ og λ.

d) (5 poeng) Bruk (c) og beregn forskyvningen som en funksjon av g, μ og λ.

Hint: Husk uttrykket for Hooke's lov invers:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\operatorname{tr}\sigma)I\right) \tag{3}$$