UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 3220/4220 — Viskøse væsker og elastiske medier.
Eksamensdag:	Onsdag 4. desember 2013.
Tid for eksamen:	9.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Tyngdedrevet viskøs strøm (vekt 50%)

En vertikal, sirkulær, sylinder har radius a og er i ro. På utsiden av denne strømmer en Newtonsk, inkompressibel væskefilm under tyngdens påvirkning. Vi antar at tykkelsen av væskefilmen, $b - a$, er konstant langs og rundt sylinderen. Et koordinatsystem plasseres med z aksen pekende oppover i sylinderens symmetriakse, mens x og y aksene er vertikale. Se figur 1.

Vi antar videre at strømmen er stasjonær og radielt symmetrisk. I sylinderkoordinater (r, θ, z) kan da hastigheten skrives $\mathbf{v} = u(r)\mathbf{i}_r + w(r)\mathbf{k}$. På væskeoverflaten virker det et ytre trykk, p_0, mens skjærspenningen ignoreres.

1a (vekt 10%)

Vis at $w = 0$ overalt i væska.

1b (vekt 30%)

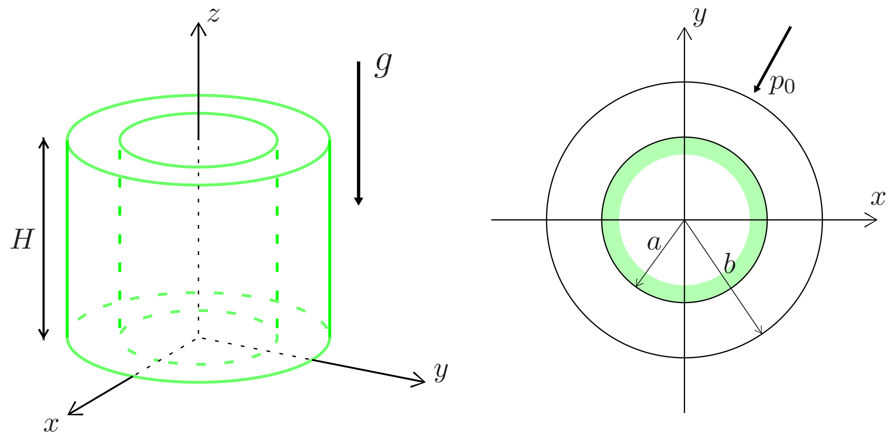
Finn u og p.

1c (vekt 10%)

Vi betrakter en del av sylinderen med høyde H (se figur). Bruk resultatene fra forrige delspørsmål til å vise at det totale draget, D, på denne delen av sylinderen er

$$D = -\rho g \pi H (b^2 - a^2),$$

Forklar denne relasjonen fysisk.



Figur 1: Strømning på utsiden av en sylinder. Venstre: vertikal seksjon. Høyre: horisontalt snitt.

Oppgave 2 Likevektslikningen for et generelt medium (vekt 10%)

Et medium er i ro under tyngdens påvirkning. Sett opp den integrerte likningen for likevekt av et vilkårlig endelig volum. Bruk denne til å utlede likevektslikningen på differensialform

$$0 = \nabla \cdot \mathcal{P} - \rho g \mathbf{k},$$

der g er tyngdens akselerasjon, ρ er tettheten, $\mathcal{P}$ er spenningstensoren og vi antar at $\mathbf{k}$ peker vertikalt oppover.

Oppgave 3 En kube under påvirkning av trykk og tyngde (vekt 40%)

En kube har sidekanter med lengde a og er nedsenket i en væske. Både væsken og kuben har tetthet ρ og er i likevekt i tyngdefeltet. Sideflatene av kuben er horisontale eller vertikale. Et koordinatsystem innføres med origo i sentrum av kuben, mens aksene er vinkelrette mot sideflatene med z aksen pekende vertikalt oppover. De seks sideflatene befinner seg da ved $x = \pm\frac{1}{2}a$ (vertikale), $y = \pm\frac{1}{2}a$ (vertikale) og $z = \pm\frac{1}{2}a$ (horisontale). I væsken er det et hydrostatisk trykk $p(z) = p_0 - \rho g z$ (ikke vis dette). Foreløpig antar vi ingenting om relasjoner mellom tøyninger og deformasjoner for matrialet kuben er laget av.

3a (vekt 10%)

Sett opp de dynamiske randbetingelsene og vis at hver av de ikke-diagonale elementene i spenningstensoren er null på fire av sideflatene.

3b (vekt 10%)

På grunnlag av forrige punkt antar vi at $p_{xy} = p_{xz} = p_{yz} = 0$ overalt i kuben. Bruk likevektslikningen fra forrige oppgave til å finne de diagonale elementene i spenningstensoren.

3c (vekt 10%)

Vi antar nå at mediet oppfyller Hook's lov $\mathcal{P} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} I + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*)$, der I er identitetsmatrisen og $\mathbf{u}$ er forskyvningen.
Vis at tøyningene er gitt ved

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\frac{p(z)}{2\mu + 3\lambda},$$
$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0.$$

3d (vekt 10%)

For å forenkle regningene antar vi nå at p_0 er meget stor slik at vi kan sette $g = 0$ i uttrykket for $p(z)$. Finn forskyvningen $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$. For å eliminere bevegelser som stivt legeme antar vi at sentrum i kuben ikke forskyves og at symmetriplanet gjennom midten av kuben, normalt x-aksen, ikke er forskjøvet i x-retning. Når det samme antas mhp. y og z-retningene gir dette de tre betingelsene $u(0, y, z) = 0$, $v(x, 0, z) = 0$ og $w(x, y, 0) = 0$.

SLUTT