UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 3300/4300 — Viskøs strømning og turbulens.
Eksamensdag:	Onsdag 13. juni 2007.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Rommet $y > 0$ (se figur 1) er fylt med et homogent fluid med konstant tetthet ρ og konstant kinematisk viskositet ν.

Figur 1 viser skjematisk rommet $y > 0$ omtalt i teksten. Det kartesiske (x, y)-koordinatsystemet referert til i teksten er også vist i figuren.

Planet $y = 0$ har hastigheten $U_0 cos(\omega t)\mathbf{i}$ hvor U_0 er konstant, ω er angulær oscillasjonsfrekvens, t er tiden og $\mathbf{i}$ er enhetsvektoren i $x-$retningen. Trykket i fluidet er konstant og det er ingen annen bevegelse i fluidet enn den som induseres av bevegelsen til planet $y = 0$.

a) Finn fluidets bevegelse.

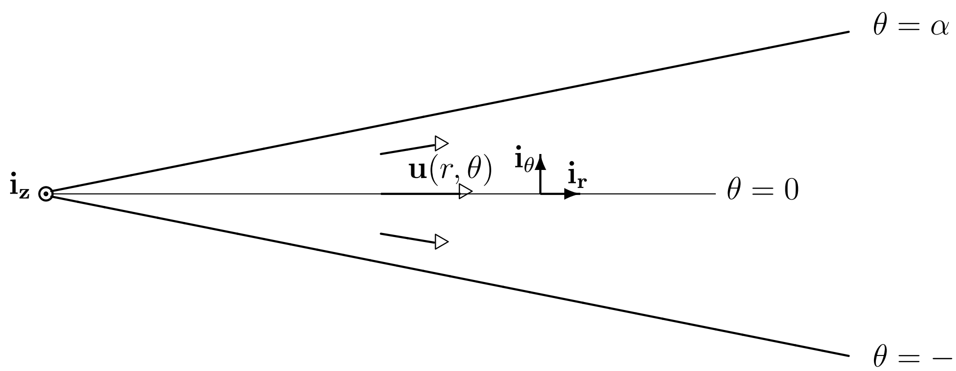
(Fortsettes side 2.)

b) Finn veggskjærspenningen ved planet $y = 0$.

c) Finn arbeidet planet $y = 0$ ved sin bevegelse utfører på fluidet pr. m^2 og pr. *sek*.

Oppgave 2.

I en lang kileformet spalt med åpningsvinkel 2α (se figur) er det i apex en linjekilde med konstant tidsuavhengig styrke Q (m^2/s), som driver en utgående væskestrøm i spalten. Væsken er homogen med konstant tetthet ρ og konstant kinematisk viskositet ν. Hastighetsfeltet som oppstår skal beskrives i sylinderkoordinater (r, θ, z). Linjekilden ligger langs $z-$aksen og $\theta = 0$ retningen velges langs halveringslinjen for åpningsvinkelen.



Figur 2 viser skjematisk spalten med væskestrømning $\mathbf{u}(r, \theta)$ omtalt i teksten. Det sylindriske (r, θ, z)-koordinatsystemet referert til i teksten er også indikert i figuren.

Hastighetsfeltet, som antas laminært og stabilt, blir av formen $\mathbf{u}(r, \theta) = \mathbf{i}_r u(r, \theta; \alpha)$

a) Vis at

$$u(r, \theta; \alpha) = \frac{f(\theta; \alpha)}{r} \tag{1}$$

og finn en relasjon mellom $f(\theta; \alpha)$ og Q.

Vi innfører $\theta = \alpha\eta$ slik at

$$f(\theta; \alpha)_{\theta=\alpha\eta} = F(\eta; \alpha) \tag{2}$$

Hvirvlingen $\boldsymbol{\omega}$ er definert ved

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \tag{3}$$

Hvirvellikningen er

$$\mathbf{u} \cdot \nabla\boldsymbol{\omega} = \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{4}$$

(Fortsettes side 3.)

b) Vis med utgangspunkt i ovenstående opplysninger at differensiallikningen for $F(\eta, \alpha)$ blir

$$\frac{d^3F}{d\eta^3} + 4\alpha^2\frac{dF}{d\eta} + \frac{2\alpha^2}{\nu}F\frac{dF}{d\eta} = 0$$

og spesifiser randbetingelsene for $F(\eta; \alpha)$.

c) Likningen kan integreres to ganger. Gjør det.

d) Anta $\alpha \ll 1$ og $\frac{\alpha^2}{\nu} \ll 1$ og bruk dette til å forenkle likningen. Løs den forenklede likningen og bruk randbetingelsene du spesifiserte i svaret på b), samt kildestyrken Q, til å bestemme integrasjonskonstantene.

Kontinuitets-likningen i sylinderkoordinater (r, θ, z) med tilhørende hastighetskomponenter (u, v, w) er

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

Videre er

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + w\frac{\partial}{\partial z} \tag{6}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{7}$$

$$\nabla = \mathbf{i}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{i}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{8}$$

og

$$\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} = \mathbf{i}_\theta, \ \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{i_r} \tag{9}$$

Oppgave 3.

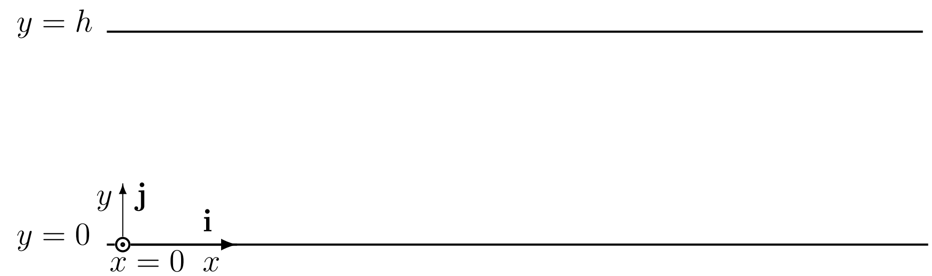
Rommet mellom to plan $y = 0$ og $y = h$ er fylt med et fluid med konstant tetthet ρ og konstant kinematisk viskositet ν (se figur 3). Fluidet strømmer turbulent mellom planene drevet av trykkfeltet

$$p(\mathbf{x}, t) = P(x, y) + p'(\mathbf{x}, t) \tag{10}$$

der

$$P(x, y) = \lim_{T\to\infty}[\frac{1}{T}\int_t^{t+T} p(\mathbf{x}, t')dt'] \tag{11}$$

(Fortsettes side 4.)



Figur 3 viser skjematisk rommet mellom to plan $y = 0$ $y = h$ omtalt i teksten. Det kartesiske (x, y)-koordinatsystemet referert til i teksten er også vist i figuren.

I det kartesiske (x, y, z)-koordinatsystemet som er indikert i figur 3, har strømningsfeltet hastighetskomponentene (u, v, w). Strømningen er fullt utviklet og det er gitt at

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\beta \tag{12}$$

der $\beta > 0$ og konstant.

a) Finn veggskjærspenningen

$$\tau_w = f(\beta, h) \tag{13}$$

Hastighetskomponentene kan dekomponeres som følger

$$u(\mathbf{x}, t) = U(y) + u'\mathbf{x}, t) \tag{14}$$

$$v(\mathbf{x}, t) = v'\mathbf{x}, t) \tag{15}$$

$$w(\mathbf{x}, t) = w'\mathbf{x}, t) \tag{16}$$

der (u, v, w) er det totale hastighetsfeltet. $U(y)$ er definert ved

$$U(y) = \lim_{T\to\infty}[\frac{1}{T}\int_t^{t+T} u(\mathbf{x}, t')dt'] \tag{17}$$

mens (u', v', w') er fluktuasjonsfeltet (turbulensen).

b) Vis at

$$P(x, y) = -\beta x - \rho\overline{v'^2(\mathbf{x}, t)} \tag{18}$$

hvor

$$\rho\overline{v'^2(\mathbf{x}, t)} = \lim_{T\to\infty}[\frac{1}{T}\int_t^{t+T} v'^2(\mathbf{x}, t')dt'] \tag{19}$$

Den totale tidsmidlede skjærspenningen Σ_{yx} er formelt gitt som

$$\Sigma_{yx} = -\rho\overline{v'u'} + \mu\frac{\partial U}{\partial y} \tag{20}$$

c) Finn

$$\Sigma_{yx} = g(y; \beta; h) \tag{21}$$

SLUTT