UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 2200/4200 — Viskøse væsker og elastiske stoffer.
Eksamensdag:	Tirsdag 4. desember 2007.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

I et kartesisk koordinatsystem x, y, z er spenningstensoren gitt ved

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \tau \\ 0 & \tau & p_2 \end{Bmatrix}$$

hvor p_1, p_2 og τ er konstanter.

a) Finn spenning på en flate med normalvektor $\boldsymbol{n} = \{0, 0, 1\}$.

b) Finn normalspenningen og tangensialspenningen (størrelse og retning) på den samme flaten.

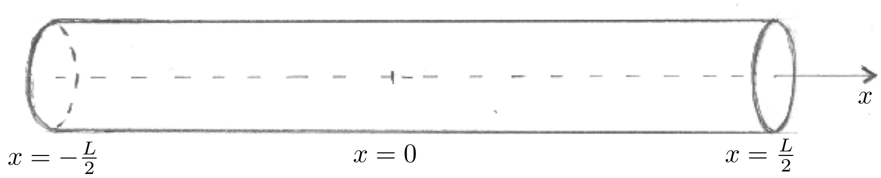
c) Bestem hovedspenningene (prinsipalspenningene), men ikke retningene, for den gitte spenningstensoren.

(Fortsettes side 2.)

d) Vi antar et isotropt elastisk medium som følger Hookes lov. Bestem komponentene i tøyningstensoren $\{\epsilon_{ij}\}$ for $i \neq j$ som tilsvarer den gitte spenningstensoren.

Oppgave 2.

En rett elastisk stang med sirkulært tverrsnitt har lengde L og radius a. Stanga består av et homogent, isotropt materiale med tetthet ρ og Youngs modul E. Vi legger x-aksen langs stangas senterakse slik som vist på figuren med origo midt i stanga. Det er ingen volumkrefter.



Det er en-dimensjonal spenning i stanga og de longitudinale forskyvninger i stangas lengderetning av formen

$$u(x,t) = \hat{u}(x)\sin\omega t$$

hvor $\hat{u}(x)$ er en funksjon bare av x, ω er vinkelhastigheten (rad/s) og t er tiden.

a) Vis at $u(x,t)$ må oppfylle likningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

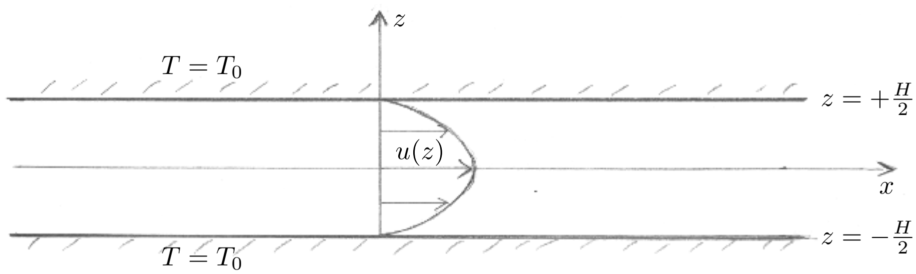
b) Bestem funksjonen $\hat{u}(x)$ og perioden for svingningene i stanga når endene ved $x = \pm\frac{L}{2}$ er spenningsfrie.

c) For symmetriske forskyvninger er $\hat{u}(x) = B\cos kx$, hvor k er en konstant. Vis at svingninger kan tolkes som bølger som går fram og tilbake i stanga. Bestem forplantningshastigheten for bølgene.
Hint:
$$\cos kx \sin\omega t = \tfrac{1}{2}[\sin(kx+\omega t) - \sin(kx-\omega t)]$$

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3.

En homogen, inkompressibel Newtonsk væske strømmer rettlinjet og stasjonært mellom to parallelle faste horisontale plan. Væsken har tetthet ρ og viskositetskoeffisient μ. Vi legger et kartesisk koordinatsystem x, z med x-aksen midt mellom planene slik som figuren viser.



Vi antar at det er en konstant trykkgradient $\frac{\partial p}{\partial x} = -\beta$ i x-retning, hvor β er en positiv konstant. Det er ingen volumkrefter.

a) Vis at strømhastigheten u bare er funksjon av z og finn $u(z)$.

b) Bestem skjærspenningen på planene (veggene) $z = \pm\frac{H}{2}$ (størrelse og retning).

c) Regn ut energidissipasjonen $\left(\Delta = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}^2\right)$ per volumenhet og tidsenhet og bestem temperaturen i væsken $T(z)$. Vi antar at temperaturen på de to planene holdes konstant på T_0 og at det er stasjonære forhold. Varmediffusiviteten i væsken er κ og den spesifike varmekapasiteten er c.

SLUTT