Numerisk beregning av Blasiusprofilet

En enkel anvendelse av skytemetoden

G. Pedersen

Matematisk institutt, Universitetet i Oslo

MEK3220/4220, Høst, 2013

Formulering av problem

Bakgrunn

Grensesjikt ved halvuendelig plate i uniform strøm.
Similaritetsantagelse for hastighetskomponent langs plata

$$u = Uf'(\zeta), \quad \zeta = \frac{z}{\delta(x)}.$$

Insetting i grensesjiktslikninger + seprasjon av variable

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2\nu x}{U}},$$

og en ODE for f som funksjon av ζ.

System som skal løses numerisk

Problem for f

$$f''' + ff'' = 0, \tag{1}$$

med randbetingelser

$$f(0) = f'(0) = 0, \qquad \lim_{\zeta\to\infty} f' = 1. \tag{2}$$

- Ikkelineær likning av grad 3
- 3 randbetingelser.
  Kompliserende: 2 ved $\zeta = 0$, 1 for store ζ.

Effektive standard-algoritmer tilgjengelige for sett av førsteordenslikninger med initialbetingelser.
Strategi: Bruker en slik

Omforming til sett av likninger av grad 1

Døper om f til y_1
Definerer $y_2 = f' = y_1'$ og $y_3 = f'' = y_2'$.
Definisjoner og (1) gir

$$\left.\begin{array}{rcr} y_1' & = & y_2, \\ y_2' & = & y_3, \\ y_3' & = & -y_1 y_3, \end{array}\right\} \tag{3}$$

og randbetingelser

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \qquad \lim_{\zeta\to\infty} y_2 = 1. \tag{4}$$

Problem: Vi har stadig to betingelser ved $\zeta = 0$ og en ved $\zeta = \infty$.

Skytemetode

Med en betingelse på $y_3(0)$, og ikke på $y_2(\infty)$: kunne brukt feks. Runge-Kuttas metode for initialverdiproblem.
Først: bytter ut betingelse $y_2(\infty) = 1$ med $y_2(z_\infty) = 1$, ζ_∞ er stor nok – her holder $z_\infty = 10$.

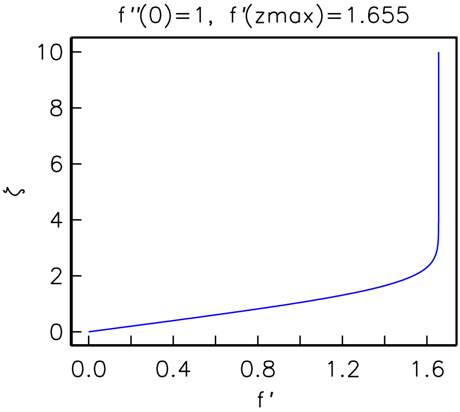
Skytemetode

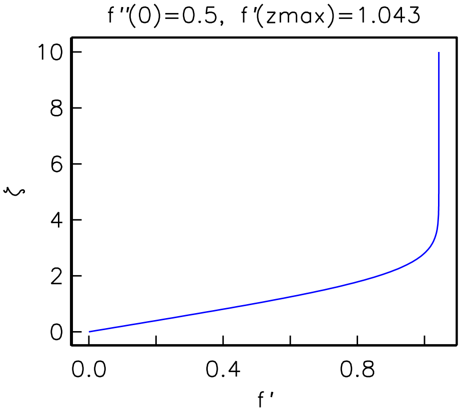
Tilpasser en startverdi, $y_3(0) = a$, slik at vi "treffer" betingelsen ved z_∞ ved å bruke Runge-Kuttas metode for initialverdiproblem.

Manuell prosedyre

1. Gjett på a
2. Løs initialverdiproblem numerisk. Finn $G = y_2(z_\infty)$.
3. Se på $G - 1$, gjør nytt gjett for a. Gjenta....

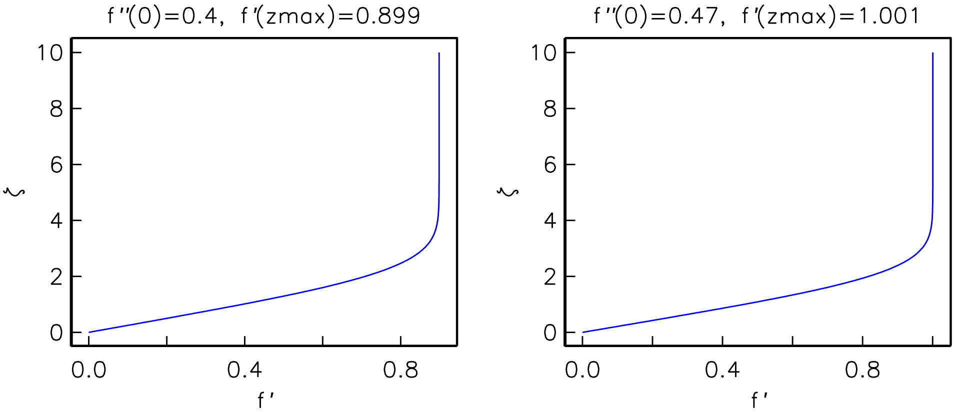
Første to gjett; $a = f''(0) = 1$ og $a = 0.5$





$a = 0.5$ var jo ikke verst...

Vi skyter oss inn



Monotonitet og grad av bom kan brukes

Oppløsning $\Rightarrow$ feil i G, $\sim 10^{-8}$, $z_{\max} = 10 \Rightarrow$ feil $< 10^{-16}$

En forbedret metode

Vi korrigerer gjettene våre ut fra verdi på $G - 1$, altså hvor mye vi bommer.

Automatisk søk etter rett a

Hver a gir en G, dvs: vi har en funksjon $G(a)$
Vi kan pakke ("wrap") bruk av ODE løseren inn i en representasjon av funksjonen $R(a) = G(a) - 1$ og løse

$$R(a) = 0,$$

ved feks. secantmetoden (standard metode for nullpunkter).

Secantmetode med $a_0 = 1$ og $a_1 = 0.9$.

n	a	R
0	1.0	0.665
1	0.9	0.543
2	0.416	-0.077
3	0.476	0.0097
5	0.4696	$-4.6 \cdot 10^{-7}$

MERKNAD: Dette er et usedvanlig snilt problem for bruk av skytemetode. I andre randverdiproblemer må vi bruke andre teknikker

- Implisitte metoder
- Kollokasjon med Chebychev-polynomer
- ...