LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MEK 4220/3220 DESEMBER 2008 av Bjørn Gjevik

Oppgave 1

a) Spenningen på en flate med normalvektor $\mathbf{n} = \{1, 0, 1\}/\sqrt{2}$ er gitt ved Cauchy's sats:

$$\mathbf{P}_n = \mathcal{P} \cdot \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} 0 & \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\left\{ \frac{\tau_2}{\sqrt{2}}, \frac{\tau_1}{\sqrt{2}}, \frac{\tau_2}{\sqrt{2}} \right\}}}$$

b) Normalspenningen er:

$$P_{nn} = \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{n} = \frac{\tau_2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\tau_1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{\tau_2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\tau_2}}$$

Skjærspenningen gitt ved

$$\mathbf{P}_{nt} = \mathbf{P}_n - P_{nn} \mathbf{n} = \left\{ \frac{\tau_2}{\sqrt{2}}, \frac{\tau_1}{\sqrt{2}}, \frac{\tau_2}{\sqrt{2}} \right\} - \left\{ \frac{\tau_2}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\tau_2}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$= \underline{\underline{\left\{ 0, \frac{\tau_1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}}}$$

Skjærspenningen er rettet i y-retning og størrelsen er $|\mathbf{P}_{nt}| = \frac{\tau_1}{\sqrt{2}}$

c) Hookes lov for isotropt elastisk medium

$$P_{ij} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \, \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

hvor $\nabla\cdot\mathbf{u}$ er divergensen til forskyvningsvektoren og λ, μ er Lamées elastisitetskoeffisienter.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

er tøyningstensoren. Nå må:

$$P_{xx} = \lambda \nabla\cdot\mathbf{u} + 2\mu\varepsilon_{xx} = 0 \quad (1)$$

$$P_{yy} = \lambda \nabla\cdot\mathbf{u} + 2\mu\varepsilon_{yy} = 0 \quad (2)$$

$$P_{zz} = \lambda \nabla\cdot\mathbf{u} + 2\mu\varepsilon_{zz} = 0 \quad (3)$$

Summerer de tre likningene og får

$$3\lambda \nabla\cdot\mathbf{u} + 2\mu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = 0$$

Siden $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \nabla\cdot\mathbf{u}$ får vi:

$$(3\lambda + 2\mu)\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

Det vil si at $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ og fra likning (1) – (3) følger h.h.v $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0$.

Fra Hookes lov får vi også

$$P_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} = \tau_1$$

$$P_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz} = \tau_2$$

$$P_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} = 0$$

Følgelig får vi tøyningstensoren

$$\varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{\tau_1}{2\mu} & \frac{\tau_2}{2\mu} \\ \frac{\tau_1}{2\mu} & 0 & 0 \\ \frac{\tau_2}{2\mu} & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Oppgave 2

a) Bevegelseslikningen for elastisk stoff.

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot u) + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \qquad (4)$$

hvor $\lambda = \begin{cases}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{cases}$, $\mu = \begin{cases}\mu_1 \\ \mu_2\end{cases}$ og $\rho = \begin{cases}\rho_1 \\ \rho_2\end{cases}$

avhengig av om en betrakter lag 1 eller lag 2.

Regner to-dimensjonal forskyvning i x,z planet

$$u = \{u_i\} = \{0, u_z(x,t)\}$$

I dette tilfellet er:

$$\nabla\cdot u = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Følgelig får vi fra z-komponenten av likning (4)

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \qquad (5)$$

Dette er bølgelikningen med forplantnings-hastighet

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad \mu = \begin{cases} \mu_1 \\ \mu_2 \end{cases}, \quad \rho = \begin{cases} \rho_1 \\ \rho_2 \end{cases}$$

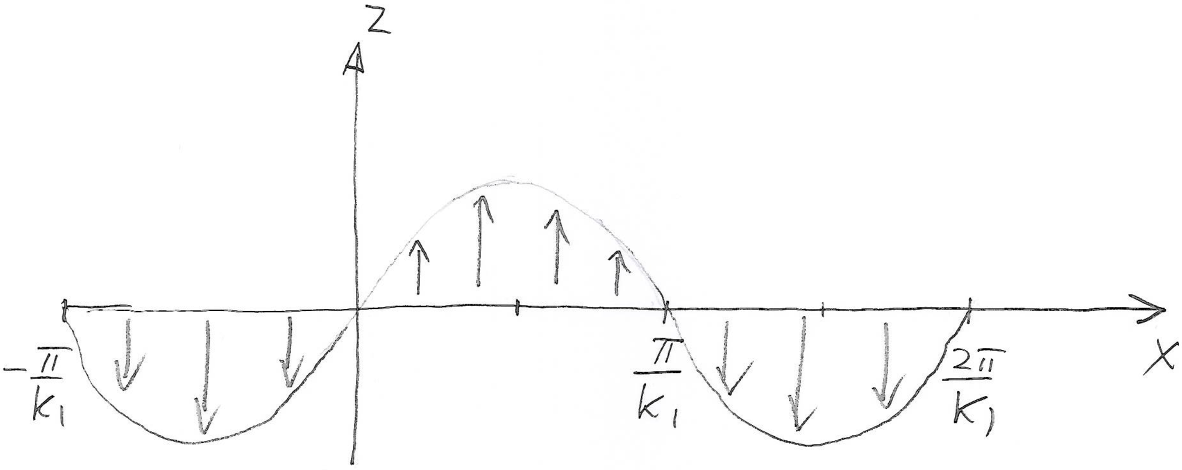
b) Setter $u_2(x,t) = I \sin(k_1 x - \omega t)$. Innsatt i (5) (for lag 1).

$$-(-\omega)^2 \cancel{I} \cancel{\sin(\,)} = c_1^2 (-k_1)^2 - \cancel{I} \cancel{\sin(\,)}$$

Derav:

$$\underline{\underline{k_1 = \frac{\omega}{c_1} \quad \text{hvor } c_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}}}$$

Skisser for $t=0$ $\quad u_2(x, t=0) = I \sin k_1 x$



c) Reflektert bølge

$$u_2^R = R \sin(k_1 x + \omega t)$$ + fordi bølgen går i neg. x-retning

$k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ samme som for innkommende bølge

Transmittert bølge (i lag 2)

$$u_2^T = T\sin(k_2x-\omega t)$$ ÷ fordi bølgen går i pos. x-retn.

med $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$ hvor $c_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\rho_2}}$

d) Randbetingelse ved $x=0$

Kontinuerlig forskyvning.

$$u_2(x=0-) = u_2(x=0+) \quad (6)$$

Kontinuerlig skjærspenning P_{xz}

$$\mu_1 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=0-} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=0+} \quad (7)$$

I lag 1:

$$u_2 = I\sin(k_1x-\omega t) + R\sin(k_1x+\omega t)$$

I lag 2:

$$u_2 = T\sin(k_2-\omega t)$$

Innsatt i randbet. (6) og (7)

$$I\sin(-\omega t) + R\sin(\omega t) = T\sin(-\omega t)$$

$$\mu_1 k_1 I\cos(-\omega t) + \mu_1 k_1 R\cos(\omega t) = \mu_2 k_2 T\cos(-\omega t)$$

Dette gir:

$$I - R = T \qquad (8)$$

$$\rho_1 c_1^2 k_1 (I + R) = \rho_2 c_2^2 k_2 T \qquad (9)$$

Siden $\mu_1 = \rho_1 c_1^2$ og $\mu_2 = \rho_2 c_2^2$. Nå er $c_1 k_1 = c_2 k_2 = \omega$ slik at (9) kan skrives

$$\rho_1 c_1 (I + R) = \rho_2 c_2 T \qquad (10)$$

Multipliserer (8) med $\rho_2 c_2$ og får

$$\rho_2 c_2 (I - R) = \rho_2 c_2 T \qquad (11)$$

Trekker (11) fra (10) og får

$$(\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2) I + (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) R = 0$$

og

$$\underline{\underline{R = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} I}}$$

Bruker enten (10) eller (11) til å bestemme

$$\underline{\underline{T = \frac{2 \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} I}}$$

Refleksjonskoeffisienten er definert:

$$r = \frac{R}{I} = \underline{\underline{\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}}}$$

Oppgave 2d forsatt.

Ingen refleksjon ($r=0$) dersom $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$ dvs. lik akustisk impedanse i de to lagene.

Oppgave 3

Navier Stokes likning (inkompressibel strøm $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$)

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \qquad (12)$$

Stasjonær og rettlinjet strøm $v_i = \{u(z), 0\}$

gir $\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Komponentene i x og z retning av lik. (12) blir h.h.v

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - g\sin\theta$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad\qquad - g\cos\theta$$

Dette kan skrives

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\rho g \sin\theta - \beta}{\mu} = \alpha \quad \text{(konst)} \qquad (13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \cos\theta \qquad (14)$$

hvor trykkgradienten i x-retning $\frac{\partial p}{\partial x} = -\beta$

Integrer (13) og (14) og finner h.h.v

$$u(z) = \frac{\alpha}{2} z^2 + Az + B \qquad (15)$$

$$p(x,z) = -\rho g \cos\theta\, z + f(x) \qquad (16)$$

hvor A og B er konstanter og $f(x)$ er en funksjon av x som må bestemmes.

Grenseflatebetingelsene på strømmen er

$$u(z = \pm \tfrac{h}{2}) = 0$$

Det gir: $A = 0$ og $B = -\frac{\alpha h^2}{8}$ slik at strømprofilen blir

$$\underline{\underline{u(z) = \frac{\alpha}{2}\left[z^2 - \frac{h^2}{4}\right]}} \qquad (17)$$

Nå er det oppgitt at $p(x=0, z=0) = p_0$ vi har også at $\frac{\partial p}{\partial x} = -\beta$. Fra (16) får vi

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f'(x) = -\beta$$

Dvs

$$f(x) = -\beta x + C$$

Slik at trykket er:

$$p(x,z) = -\rho g \cos\theta\, z - \beta x + C$$

Betingelsen ved $x=0, z=0$ gir $C = p_0$ og

$$\underline{\underline{p(x,z) = p_0 - \beta x - \rho g \cos\theta\, z}}$$

Oppgave 3 b.

Dissipasjonen per volumenhet og tidsenhet er:

$$\Delta = 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}^2 = 2\mu \left[\underbrace{\dot{\varepsilon}_{xx}^2}_{=0} + 2\dot{\varepsilon}_{xz}^2 + \underbrace{\dot{\varepsilon}_{zz}^2}_{=0} \right]$$

$$= 4\mu \dot{\varepsilon}_{xz}^2 = 4\mu \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \underline{\underline{\mu(\alpha z)^2}}$$

c) Varmetransportlikningen er:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\Delta}{\rho c}$$

Forenkler seg p.g.a betingelsene om stasjonære forhold $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$, rettlinjet strøm og antagelsen $T = T(z)$ $\left(V_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = 0\right)$ til

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = -\frac{\Delta}{\rho c \varkappa} = -\frac{\mu \alpha^2}{\rho c \varkappa} z^2$$

Integrerer og får $T(z) = -\frac{1}{12}\frac{\mu\alpha^2}{\rho c \varkappa} z^4 + Az + B$

Bestemmer konstantene A og B ved grenseflatebet. $T(z = \pm \frac{h}{2}) = T_0$ og får $A = 0$, $B = T_0 + \frac{1}{12}\frac{\mu\alpha^2}{\rho c\varkappa}\left(\frac{h}{2}\right)^4$

Temperaturprofilen i væsken blir derved

$$\underline{\underline{T(z) = T_0 + \frac{1}{12}\frac{\mu\alpha^2}{\rho c\varkappa}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^4 - z^4\right]}}$$

hvor $\alpha = \frac{\rho g \sin\theta - \beta}{\mu}$, altså $\frac{\mu\alpha^2}{\rho c\varkappa} = \frac{(\rho g \sin\theta - \beta)^2}{\rho\mu c\varkappa}$