Løsningsforslag for ME115 eksamen 13 juni 2000

av

Bjørn Gjevik

Oppgave 1

a) Spenningen på sirkelkonturen er:

$$\mathbb{P}_n = \mathcal{P}\cdot\mathbb{n} = \begin{Bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\{\tau\sin\varphi, \tau\cos\varphi\}}}$$

Skrevet med enhetsvektorer:

$$\underline{\mathbb{P}_n = \tau\sin\varphi\,\mathbb{i} + \tau\cos\varphi\,\mathbb{j}}$$

b) Normalspenningen er:

$$P_{nn} = \mathbb{P}_n\cdot\mathbb{n} = \{\tau\sin\varphi, \tau\cos\varphi\}\{\cos\varphi, \sin\varphi\} = \underline{\underline{\tau\sin 2\varphi}}$$

<u>Normalspenningen er rettet langs $\mathbb{n}$</u>

Tangensialspenningen er gitt ved:

$$\mathbb{P}_{nt} = \mathbb{P}_n - P_{nn}\mathbb{n} = \tau\sin\varphi\,\mathbb{i} + \tau\cos\varphi\,\mathbb{j} - \tau\sin 2\varphi(\cos\varphi\,\mathbb{i} + \sin\varphi\,\mathbb{j})$$

$$= \underline{\underline{\tau\sin\varphi(1-2\cos^2\varphi)\mathbb{i} + \tau\cos\varphi(1-2\sin^2\varphi)\mathbb{j}}}$$

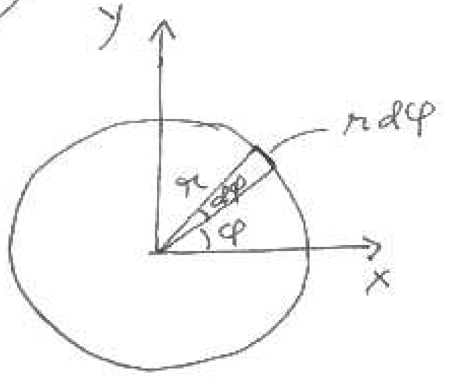
Størrelsen av tangensialspenningen finnes enklest fra:

$$|\mathbb{P}_{nt}| = |\mathbb{n}\times\mathbb{P}_n| = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \tau\sin\varphi & \tau\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= |\tau(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\mathbb{k}|$$

$$= \tau|\cos 2\varphi\,\mathbb{k}| = \underline{\underline{|\tau\cos 2\varphi|}}$$

c)



Total spenningskraft på sirkelkonturen:

$$\mathbb{K} = \int \mathbb{P}_n \, d\sigma_n = \int_0^{2\pi} \mathbb{P}_n \, r \, d\varphi$$

$$\mathbb{K} = r\,\mathbf{i} \int_0^{2\pi} \tau \sin\varphi \, d\varphi + r\,\mathbf{j} \int_0^{2\pi} \tau \cos\varphi \, d\varphi$$

$$\mathbb{K} = a r^2 \,\mathbf{i} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi + a r^2 \,\mathbf{j} \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi$$

$$\tau = ax = ar\cos\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \pi$$

$$\underline{\underline{\mathbb{K} = \pi a r^2 \,\mathbf{j}}}$$

d) Hovedspenningsretningen bestemt ved at $\mathbb{P}_{nt} = 0$.

Fra b) er dette oppfylt når $\cos^2\varphi = \sin^2\varphi = \frac{1}{2}$

Altså $\cos\varphi = \sin\varphi = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ som gir

$$\underline{\underline{\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ og } \frac{3\pi}{4}}}$$

Hovedspenningen er da gitt ved

$$P_{nn} = \tau \sin 2\varphi = \underline{\underline{\pm\tau}}$$

Oppgave 2

a) Spenningen på endeflaten $x = L$

$$\sigma = \frac{\text{kraft}}{\text{areal}} = \underline{\underline{\frac{F}{a}}}$$

Spenningen på endeflaten $x = 0$
Pga. likevekt må det virke en kraft $-F\mathbf{i}$ ($\mathbf{i}$ er enhetsvektoren langs x-aksen) på stanga i endeflaten $x=0$. Normalvektoren til denne endeflaten er $-\mathbf{i}$. Spenningskraften på endeflaten er

$$\sigma a(-\mathbf{i}) = -F\mathbf{i}$$

Altså spenningen på endeflaten $x=0$ er $\underline{\underline{\sigma = \frac{F}{a}}}$

b) Hooke's lov i 3-dimensjoner er:

$$\underline{\underline{P_{ij} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\, \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}}}$$

P_{ij} er komponentene av spenningstensoren

λ, μ er Lamés elastisitetskoeffisienter

δ_{ij} er Kroneckers delta eller enhetsmatrisen

$\mathbb{u}$ er forskyvningsvektoren med komponenter $\mathbb{u} = \{u_i\}$

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ er tøyningstensoren

$\nabla \cdot \mathbb{u} = \varepsilon_{ii}$ er divergensen til forskyvningsvektoren.

c) Med forskyvningsfeltet

$\mathbb{u} = \{\varepsilon x, \gamma y, \gamma z\}$ $\quad u_x = \varepsilon x,\ u_y = \gamma y,\ u_z = \gamma z$

er $\nabla \cdot \mathbb{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \underline{\varepsilon + 2\gamma}$

Følgelig får vi fra Hooke's lov

$$P_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon + 2\lambda\gamma$$
$$P_{yy} = \lambda\varepsilon + 2(\lambda+\mu)\gamma$$
$$P_{zz} = \lambda\varepsilon + 2(\lambda+\mu)\gamma$$

og

$$P_{xy} = P_{xz} = P_{yz} = 0$$

Nå må $P_{yy} = P_{zz} = 0$ p.g.a symmetri og randbetingelsen $\mathbb{P}_n = 0$ på sideflata av stanga. Følgelig

$$\lambda\varepsilon + 2(\lambda+\mu)\gamma = 0$$

Som gir

$$\underline{\gamma = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\varepsilon}$$

Videre må vi ha:

$$P_{xx} = (\lambda+2\mu)\varepsilon + 2\lambda\gamma = \sigma$$

pga. randbetingelser på endeflatene og betingelsen om likevekt. Setter vi inn for γ (uttrykt med ε) får vi

$$\sigma = (\lambda+2\mu)\varepsilon - \frac{\lambda^2}{\lambda+\mu}\varepsilon = \frac{(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)-\lambda^2}{\lambda+\mu}\varepsilon$$

$$= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\varepsilon$$

Vi har altså

$$\gamma = -\nu\varepsilon$$

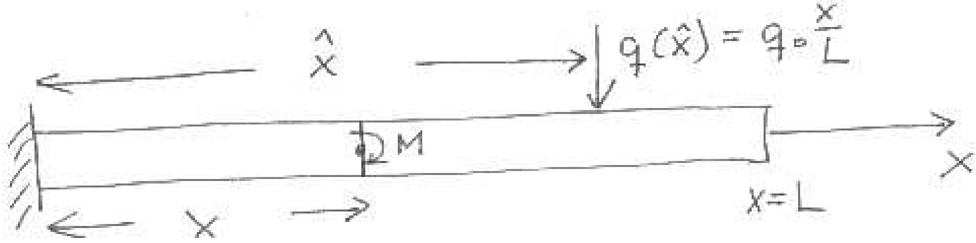
$$\sigma = E\varepsilon$$

hvor

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$ Poissons forhold (forholdet mellom tverrkontraksjon og lengde strekk)

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$ Youngs modul

d)



Momentet i snittflate i avstand x fra den fastspendte enden av lasten på den delen av stanga som ligger utenfor denne snittflaten:

$$M(x) = \int_x^L (\hat{x} - x)\, q(\hat{x})\, dx = \frac{q_0}{L}\int_x^L (\hat{x}^2 - x\hat{x})\, dx$$

$$= \frac{q_0}{L}\left[\tfrac{1}{3}\hat{x}^3 - \tfrac{1}{2}x\hat{x}\right]_x^L$$

$$= \frac{q_0}{L}\left[\tfrac{1}{3}L^3 - \tfrac{1}{2}L^2 x + \tfrac{1}{6}x^3\right]$$

Nedbøyningen av stanga gitt ved

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{q_0}{LEI}\left[\tfrac{1}{3}L^3 - \tfrac{1}{2}L^2 x + \tfrac{1}{6}x^3\right]$$

Finner $w(x)$ ved integrasjon

$$w(x) = -\frac{q_0}{LEI}\left[\tfrac{1}{6}L^3 x^2 - \tfrac{1}{12}L^2 x^3 + \tfrac{1}{120}x^5\right] + Ax + B$$

Integrasjonskonstantene A og B bestemmes ved grenseflatebetingelsene $w = \frac{dw}{dx} = 0$ for $x = 0$

Dette gir $A = B = 0$ og

$$\underline{\underline{w(x) = -\frac{q_0}{EI}\left[\tfrac{1}{6}L^2 x^2 - \tfrac{1}{12}L^{\cancel{2}} x^3 + \tfrac{1}{120}\frac{x^5}{L}\right]}}$$

Beregner nedbøyningen i $x=L$ for å sjekke fortegn

$$w(x=L) = -\frac{q_0 L^4}{6EI}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{20}\right] = -\underline{\frac{9 q_0 L^4}{120 EI}}$$

Altså $w(x=L)$ er negativ dvs enden bøyes nedover.

Oppgave 3

a) Kontinuitetslikningen for inkompressibel væske gir

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Siden $u=0$ følger det at w er uavhengig av z dvs $\underline{\underline{w = w(x)}}$

Naturlige randbetingelser ved planene $x = \pm\frac{h}{2}$ er full heft dvs.

$$\underline{\underline{w\left(x = \pm\frac{h}{2}\right) = 0}}$$

b) Strømprofilen bestemmes fra Navier-Stokes likning. z-komponenten av denne likningen er:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - g$$

NB! stasjonær rettlinjet strøm akselerasjonen $=0$.

Innsatt for $\frac{\partial p}{\partial z} = -\beta$ og $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ gir denne likningen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\rho g - \beta}{\mu}$$

Integrer for å bestemme $w(x)$

$$w(x) = \frac{\rho g - \beta}{2\mu} x^2 + Ax + B$$

Integrasjonskonstantene A og B bestemmes ved hjelp av grenseflatebetingelsene $w(x = \pm \frac{h}{2}) = 0$. Dette gir

$$\underline{\underline{w(x) = \frac{\rho g - \beta}{2\mu}\left(x^2 - \frac{h^2}{4}\right)}}$$

c) Venstre plan $(x = -\frac{h}{2})$ har normalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ ($\mathbf{i}$ er enhetsvektoren i x-retning)
Spenningen på venstre plan er derfor:

$$\mathbf{P}_n = \mathcal{P} \cdot \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} P_{xx} & P_{xz} \\ P_{zx} & P_{zz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = P_{xx}\mathbf{i} + P_{xz}\mathbf{k}$$

Skjærspenningen er derfor $\underline{\mathbf{P}_{nt} = P_{xz}\mathbf{k}}$

N3! $P_{xz} = P_{zx}$

Nå er fra Newton's friksjonslov

$$P_{xz} = 2\mu\,\varepsilon_{xz} = 2\mu \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \mu \frac{\partial w}{\partial x} = \underline{(\rho g - \beta)\, x}$$

Følgelig blir skjærspenningen ved planet $x = -\frac{h}{2}$:

$$\mathbb{P}_{nt}\left(x=-\frac{h}{2}\right) = P_{xz}\left(x=-\frac{h}{2}\right)\mathbb{k} = \underline{\underline{-\frac{(\rho g-\beta)h}{2}\mathbb{k}}}$$

Høyre plan $\left(x=\frac{h}{2}\right)$ har normalvektor $\mathbb{n} = -\mathbb{i}$. På tilsvarende måte som for venstre plan finner en at skjærspenningen på høyre plan er $\mathbb{P}_{nt} = -P_{xz}\mathbb{k}$ og at

$$\mathbb{P}_{nt}\left(x=\frac{h}{2}\right) = -P_{xz}\left(x=\frac{h}{2}\right)\mathbb{k} = \underline{\underline{-\frac{(\rho g-\beta)h}{2}\mathbb{k}}}$$

Skjærspenningene på høyre og venstre plan er altså like store og rettet i samme retning som strømhastigheten.

d) Energidissipasjonen er gitt ved uttrykket:

$$\Delta = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}^2 = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{xx}^2 + 2\dot{\varepsilon}_{xz}^2 + \dot{\varepsilon}_{zz}^2\right) = 4\mu\dot{\varepsilon}_{xz}^2$$

fordi $\dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\varepsilon}_{zz} = 0$. Nå er

$$\dot{\varepsilon}_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\rho g-\beta}{2\mu}x$$ slik at

$$\underline{\underline{\Delta = 4\mu\dot{\varepsilon}_{xz}^2 = \frac{(\rho g-\beta)^2}{\mu}x^2}}$$

e) Varmetransportlikningen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T = \kappa\nabla^2 T + \frac{\Delta}{\varrho c} + Q$$

Forutsetter: stasjonære forhold; $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, $T = T(x)$ og $\mathbf{v} = \{0, w(x)\}$ gir $\mathbf{v}\cdot\nabla T = 0$ og $Q = 0$. Varmetransportlikningen får derfor formen:

$$\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\Delta}{\varrho c} = 0$$

eller

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{\Delta}{\varrho c\kappa} = -\frac{(\varrho g-\beta)^2}{\mu\varrho c\kappa}x^2$$

Integrer for å finne $T(x)$:

$$T(x) = -\frac{(\varrho g-\beta)^2}{12\mu\varrho c\kappa} + Ax + B$$

Integrasjonskonstantene A og B bestemmes ved hjelp av grenseflatebetingelsene

$$T = T_0 \pm \frac{\Delta T}{2} \quad \text{for} \quad x = \pm\frac{h}{2}$$

Det gir $A = \frac{\Delta T}{h}$ og $B = T_0 + \frac{\varrho g-\beta}{12\mu\varrho c\kappa}\left(\frac{h}{2}\right)^4$

$$T(x) = \frac{(\varrho g-\beta)^2}{12\mu\varrho c\kappa}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^4 - x^4\right] + \frac{\Delta T}{h}x + T_0$$

f) Varmestrømmen gjennom planene gitt ved Fouriers lov

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} = -k\left[-\frac{(\rho g-\beta)^2}{3\mu\rho c\varkappa}x^3 + \frac{\Delta T}{h}\right]\mathbf{i}$$

Ved planet $x = -\frac{h}{2}$:

$$\underline{\underline{q_x\left(x=-\frac{h}{2}\right) = -k\left[\frac{(\rho g-\beta)^2 h^3}{24\mu\rho c\varkappa} + \frac{\Delta T}{h}\right]\mathbf{i}}}$$

Ved planet $x = \frac{h}{2}$

$$\underline{\underline{q_x\left(x=\frac{h}{2}\right) = -k\left[-\frac{(\rho g-\beta)^2 h^3}{24\mu\rho c\varkappa} + \frac{\Delta T}{h}\right]\mathbf{i}}}$$

Varmestrømmen p.g.a dissipasjonen er altså <u>ut</u> av væsken ved begge plan, mens varmestrømmen p.g.a temperaturforskjellen $-k\frac{\Delta T}{h}\mathbf{i}$ er rettet i negativ x-retning dvs. mot det kaldeste planet.