LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN ME115 8 JUNI 2001

av

BJØRN GJEVIK

Oppgave 1

a) Spenningen gitt ved Cauchys 1. sats

$$\mathbb{P}_n = \mathcal{P}\cdot \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} 0 & \tau_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 & \tau_2 \\ 0 & \tau_2 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\{\tau_1 \sin\varphi,\ \tau_1\cos\varphi,\ \tau_2 \sin\varphi\}}}$$

b) Normalspenningen er:

$$P_{nn} = \mathbb{P}_n \cdot \mathbf{n} = \tau_1 \sin\varphi\cos\varphi + \tau_1 \cos\varphi \sin\varphi = \underline{\underline{\tau_1 \sin 2\varphi}}$$

Normalspenninger er rettet langs $\mathbf{n}$ vektoren.

Skjærspenningen (tangensialspenningen) kan finnes fra formelen:

$$\mathbb{P}_{nt} = \mathbb{P}_n - P_{nn}\mathbf{n} = \{\tau_1 \sin\varphi - \tau_1 \sin 2\varphi\cos\varphi,\ \tau_1\cos\varphi - \tau_1 \sin 2\varphi \sin\varphi,\ \tau_2 \sin\varphi\}$$

som kan skrives:

$$\mathbb{P}_{nt} = \underline{\underline{\{\tau_1 \sin\varphi(1-2\cos^2\varphi),\ \tau_1\cos\varphi(1-2\sin^2\varphi),\ \tau_2\sin\varphi\}}}$$

eller

$$\mathbb{P}_{nt} = \{-\tau_1 \sin\varphi\cos 2\varphi,\ \tau_1\cos\varphi\cos 2\varphi,\ \tau_2\sin\varphi\}$$

Størrelsen av skjærspenningen finnes da enklest

$$P_{nt} = |\mathbb{P}_{nt}| = [\tau_1^2 \sin^2\varphi\cos^2 2\varphi + \tau_1^2\cos^2\varphi\cos^2 2\varphi + \tau_2^2\sin^2\varphi]^{1/2}$$

$$= \underline{\underline{[\tau_1^2\cos^2 2\varphi + \tau_2^2 \sin^2\varphi]^{1/2}}}$$

Størrelsen av skjærspenningen kan også finnes fra

$$P_{nt} = \| \mathbb{n} \times \mathbb{P}_n \| = \left\| \begin{matrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \tau_1 \sin\varphi & \tau_1 \cos\varphi & \tau_2 \sin\varphi \end{matrix} \right\| =$$

$$P_{nt} = \left| \tau_2 \sin^2\varphi \, \mathbb{i} - \tau_2 \sin\varphi\cos\varphi \, \mathbb{j} + \tau_1(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \, \mathbb{k} \right|$$

$$\underline{\underline{P_{nt} = \left[\tau_1^2 \cos^2 2\varphi + \tau_2^2 \sin^2\varphi\right]^{1/2}}}$$

P_{nt} har opplagt en maksimal verdi $\underline{\underline{(P_{nt})_{max} = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}}}$ når $\cos^2 2\varphi = 1$ og $\sin^2\varphi = 1$ samtidig.
Det skjer når: $\underline{\underline{\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \ldots}}$

c) Hovedspenningene er gitt ved:

$$\det \left| \mathcal{P} - \mathcal{I}\sigma \right| = \det \begin{vmatrix} -\sigma & \tau_1 & 0 \\ \tau_1 & -\sigma & \tau_2 \\ 0 & \tau_2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

Utregnet gir dette

$$-\sigma \begin{vmatrix} -\sigma & \tau_2 \\ \tau_2 & -\sigma \end{vmatrix} - \tau_1 \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ 0 & -\sigma \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \tau_1 & -\sigma \\ 0 & \tau_2 \end{vmatrix} = 0$$

Som kan skrives

$$\sigma\left[-\sigma^2 + \tau_1^2 + \tau_2^2\right] = 0$$

Altså er hovedspenningene

$$\sigma_1 = 0$$
$$\sigma_2 = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$$
$$\sigma_3 = -\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$$

Hovedspenningsretningene finnes fra

$$(\mathcal{S} - \sigma \mathcal{I}) \cdot \mathbb{n} = 0$$

Som gir likningssettet til å bestemme komponentene i retningsvektoren $\mathbb{n}$

$$-\sigma n_x + \tau_1 n_y = 0$$
$$\tau_1 n_x - \sigma n_y + \tau_2 n_z = 0$$
$$\tau_2 n_y - \sigma n_z = 0$$

<u>Retningene for $\sigma_1 = 0$</u> Velger $n_x = 1$

Av første likning $n_y = 0$. Av andre likning $n_z = -\frac{\tau_1}{\tau_2}$.

Retningsvektor: $\underline{\underline{\left\{1,\ 0\ -\frac{\tau_1}{\tau_2}\right\}}}$

<u>Retningene for $\sigma_2 = \sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}$</u>. Velger $n_x = 1$

Av ~~første~~ ~~første~~ likning $n_y = \frac{\sigma_2}{\tau_1} = \sqrt{1+\frac{\tau_2^2}{\tau_1^2}}$. Av tredje likning $n_z = \frac{\tau_2}{\sigma_2} n_y = \frac{\tau_2}{\tau_1}$

Retningsvektor: $\underline{\underline{\left\{1,\ \sqrt{1+\frac{\tau_2^2}{\tau_1^2}},\ \frac{\tau_2}{\tau_1}\right\}}}$

Retningen for $\sigma_3 = -\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}$

Tilsvarende som for σ_2

Retningsvektor $\underline{\underline{\left\{1, -\sqrt{1+\frac{\tau_2^2}{\tau_1^2}}, \frac{\tau_2}{\tau_1}\right\}}}$

Oppgave 2

a) Bevegelseslikningen for isotropt elastisk stoff (ingen volumkrefter)

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Forskyvningsvektorens komponenter $u_i = \{u_x, u_y, u_z\}$

Med $u_x = u_z = 0$ og $u_y = v(x,z,t)$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

y-komponenten av bevegelseslikningen er

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Slik at for øvre lag

$$(1) \quad \underline{\underline{\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = c_1^2\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}\right)}} \qquad c_1^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1}$$

Og for nedre lag

$$(2) \quad \underline{\underline{\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = c_2^2\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}\right)}} \qquad c_2^2 = \frac{\mu_2}{\rho_2}$$

b) Innsatt $v_1 = \hat{v}_1(z) \sin k(x-ct)$ i ①
gir for øvre lag

$$-k^2c^2\hat{v}_1 \sin k(x-ct) = c_1^2\left(-k^2\hat{v}_1 + \frac{d^2\hat{v}_1}{dz^2}\right)\sin k(x-ct)$$

Forkorter og ordner og får:

$$③ \quad \frac{d^2\hat{v}_1}{dz^2} = -k_1^2\hat{v}_1 \quad , \quad k_1^2 = k^2\left(\frac{c^2}{c_1^2}-1\right)$$

På tilsvarende måte for nedre lag
ved innsetning i ②

$$④ \quad \frac{d^2\hat{v}_2}{dz^2} = k_2^2\hat{v}_2 \quad , \quad k_2^2 = k^2\left(1-\frac{c^2}{c_2^2}\right)$$

Antar $k_1^2 > 0$ da må $c > c_1$
Antar $k_2^2 > 0$ —"— $c < c_2$

Altså må $c_1 < c < c_2$

Bølgehastigheten må altså ligge mellom
bølgehastigheten i øvre og nedre lag.

c) Spenningsfritt ved overflaten $P_{zx} = P_{zy} = P_{zz} = 0$
Fra Hooke's lov $P_{ij} = \lambda \nabla\cdot u\,\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$. Nå
er $\nabla\cdot u = 0$ og

$$P_{zx} = 2\mu\varepsilon_{zx} = 2\mu\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = 0 \quad (\text{siden } u_z = u_x = 0)$$

$$P_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} = 2\mu\,\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$P_{zy} = 2\mu\varepsilon_{zy} = 2\mu\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = \mu\frac{\partial v}{\partial z} \quad (u_y = v)$$

Kravet om spenningsfri overflate blir altså

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z = H$$

Ved skilleflaten må det være kontinuerlig forskyvning og spenninger. Dette gir

$$V_1 = V_2 \quad \text{for } z = 0$$

$$\mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial z} \quad \text{for } z = 0$$

I dypet $z \to -\infty$ må bevegelsen dø ut. Altså

$$V_2 \to 0 \quad z \to -\infty$$

d) Løsningene av likningene ③ og ④ kan skrives henholdsvis

$$\hat{V}_1 = A \sin k_1 z + B \cos k_1 z$$

$$\hat{V}_2 = C e^{k_2 z} + D e^{-k_2 z}$$

hvor A, B, C og D er integrasjonskonstanter

På grunn av randkravet for $z \to -\infty$ må man velge $D = 0$.

De øvrige randbetingelsene gir:

$$A k_1 \cos k_1 H - B k_1 \sin k_1 H = 0$$

$$B = C$$

$$\mu_1 k_1 A = \mu_2 k_2 C$$

Setter $B = C$ i første likning og dividerer første likning på tredje likning.

$$\frac{k_1 \cos k_1 H}{\mu_1 k_1} = \frac{k_1 \sin k_1 H}{\mu_2 k_2}$$

Dette gir:

$$\underline{\underline{\tan k_1 H = \frac{\mu_2 k_2}{\mu_1 k_1}}}$$

Dersom $kH \ll 1 \Rightarrow k_1 H \ll 1$ og $\tan k_1 H \cong 0$
Altså må $k_2 \cong 0$ som gir at:

$$\underline{\underline{C \cong C_2}}$$

Oppgave 3

a) Navier Stokes likning for inkompressibel væske kan skrives:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i^y$$

Antar to-dimensjonal strømning $v_i = \{u, w\}$
Ingen volumkrefter $f_i^y = 0$
Stasjonær strøm $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$
Neglisjerbare trykkgradienter i grensesjiktet $\frac{\partial p}{\partial x_i} \cong 0$

Antar også at endringene i strømfeltet på tvers i grensesjiktet (z-retning) er mye større enn langs grensesjiktet (x-retning)
Det betyr at:

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\right| \gg \left|\frac{\partial}{\partial x}\right| \quad \text{og} \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right| \gg \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right|$$

Strømkomponenten i x-retning er også mye større enn i z-retning $|u| \gg |w|$
Når vi bruker disse antagelsen kan x-komponenten av Navier-Stokes skrives:

$$\underline{\underline{u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}}$$

fordi $\left(v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{x\text{-komp}} = u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j \partial x_j}\right)_{x\text{-komp}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cong \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

b) Helt nær veggen (plata) er $u = w \cong 0$ slik at venstre side i likningen ovenfor er tilnærmet null. Altså

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Integrerer vi får vi

$$u = Az + B$$

og siden $u = 0$ for $z = 0$

$$\underline{\underline{u = Az}}$$

Altså en lineær strømprofil nær veggen.

c) Skjærspenningen ved plata er

$$P_{zx}\Big|_{z=0} = 2\mu\,\varepsilon_{zx}\Big|_{z=0} = 2\mu\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{z=0} = \mu\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}$$

$$P_{zx} = \mu\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\pi\mu u_0}{2\delta}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{z}{\delta}\right)\Big|_{z=0} = \underline{\underline{\frac{\pi\mu u_0}{2\delta}}}$$

Retningen av skjærspenningen er åpenbart i strømretning altså i x-retning.

d) Kraften på plata finnes ved å integrere skjærspenningen (to sider!)

$$\mathbb{F} = 2\,\mathbf{i}\int_0^L P_{zx}\,dx = \left[\pi\mu u_0\int_0^L\frac{dx}{\delta(x)}\right]\mathbf{i}$$

$$\mathbb{F} = \left[\frac{\pi\mu u_0}{5}\sqrt{\frac{u_0}{\nu}}\int_0^L\frac{dx}{\sqrt{x}}\right]\mathbf{i} = \left[\frac{2\pi\rho\nu u_0^{\frac{3}{2}}}{\nu^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{1}{2}}\right]_0^L\mathbf{i}$$

$$\mathbb{F} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{5}\rho\,\nu^{\frac{1}{2}}u_0^{\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}\,\mathbf{i}}}$$

Sjekker enheten: $[\rho] = \mathrm{kg/m^3}$, $[\nu] = \frac{m^2}{s}$, $[u_0] = \frac{m}{s}$

$[L] = m$. $[F] = \frac{kg}{m^3}\,\frac{m}{s^{\frac{1}{2}}}\,\frac{m^{3/2}}{s^{3/2}}\,m^{1/2} = \frac{kg\,m}{s^2}\,\frac{1}{m} = \frac{N}{m}$

Altså kraften har enhet N per meter i lengde retning på tvers av strømmen.

e) Hastighetskomponenten i z-retning finnes fra kontinuitetslikningen (inkompressibel væske)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$w = -\int_0^z\frac{\partial u}{\partial x}\,dz$$

$$u = u_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{z}{\delta}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0 \pi z}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{z}{\delta}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\delta(x)}\right]$$

$$= -\frac{u_0 \pi \delta'}{2\delta^2} z \cos az \qquad \text{hvor } \delta' = \frac{d\delta}{dx}$$

$$\text{og } a = \frac{\pi}{2\delta}$$

Innsatt i uttrykket for w (side 9, nederste likning)

$$w = \frac{u_0 \pi \delta'}{2\delta^2} \int_0^z z \cos az \, dz$$

$$= \frac{u_0 \pi \delta'}{2\delta^2}\left[\frac{1}{a^2}\cos az + \frac{z}{a}\sin az\right]_0^z$$

$$= \frac{u_0 \pi \delta'}{2\delta^2 a^2}\left[\cos az + az \sin az - 1\right]$$

Nå er $\delta^2 a^2 = \frac{\pi^2}{4}$ slik at vi kan skrive

$$\underline{\underline{w = \frac{2u_0\delta'}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi z}{2\delta}\right) + \left(\frac{\pi z}{2\delta}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{2\delta}\right) - 1\right]}}$$