Løsningsforslag MEK 3220

Høst 2010

Oppg. 1 .

a) Vi starter med Naviers likning

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\lambda + \mu}{\rho} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}.$$

Det er ikke oppgitt at vi har ytre krefter. Derfor settes $\mathbf{f} = 0$ og

$$\nabla \cdot (u(x,t)\mathbf{i}) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathbf{i},$$

$$\nabla^2 (u\mathbf{i}) = \nabla^2 u \mathbf{i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathbf{i}, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mathbf{i}$$

Alle bidrag har bare en $\mathbf{i}$ komponent og innsetting i Naviers likning gir da

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2\mu + \lambda}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

der $c_L^2 = (2\mu + \lambda)/\rho$.

b) Likningen vi har funnet i forrige delpunkt har løsning feks. $u = A \cos k(x - c_L t)$ (eller mer generelt $f(x \pm c_L t)$). Beveger vi oss med hastighet c_L i x-retning vil argumentet til cos være konstant og vi har samme u verdi. Hele løsningen er da en bølge som går med uendret form i x-retning.

c) Hookes lov

$$\mathcal{P} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} I + \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

Her har vi divergensen fra før, mens

$$\nabla \mathbf{u} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u(x,t)\mathbf{i} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{ii},$$

og

$$\mathcal{P} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} I + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{ii}.$$

På matriseform kan dette skrives

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{ccc} (2\mu+\lambda)\frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\frac{\partial u}{\partial x} \end{array} \right\}$$

Siden $\mathcal{P}$ allerede er på diagonal form blir prinsipalretningenene hhv. x, y og z retning med spenninger $(2\mu+\lambda)\frac{\partial u}{\partial x}$, $\lambda\frac{\partial u}{\partial x}$ og $\lambda\frac{\partial u}{\partial x}$.
Maksimal normalspenning finner vi alltid i den prinsipalretningen med størst prinsipalspenning. Vi er bedt om å begrunne dette. La oss se på normalspenningen for flaten med enhetsnormal $\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + ny\mathbf{j} + nz\mathbf{k}$. Spenningen blir da

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \mathcal{P} = \frac{\partial u}{\partial x} \left((2\mu+\lambda)n_x\mathbf{i} + \lambda(n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k})\right)$$

Da blir absoluttverdien av normalspenningen

$$|p_n| = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}| = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \left|(2\mu+\lambda)n_x^2 + \lambda(n_y^2 + n_z^2)\right|.$$

Det synes klart at vi får størst verdi når n_x^2 er størst mulig. For å gjøre dette tydligere eliminerer vi n_x vha. $n_x^2 = 1 - n_y^2 - n_z^2$.

$$|p_n| = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \left|(2\mu+\lambda) - 2\mu(n_y^2 + n_z^2)\right|.$$

Derved følger at den største normalspenning vi kan ha er prinsipalspenningen tilhørende $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, tilsvarende $n_y = n_z = 0$.
Alternativ: Metoden ovenfor kan lett generaliseres til tilfellet med 3 ulike prinsipalspenninger. Når spenningstilstanden er slik som i denne oppgaven kan vi gjøre det enda enklere. Vi har

$$p_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\cdot\mathcal{P} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\cdot\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x}I + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{ii}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{n}\cdot(\lambda\mathbf{n} + 2\mu n_x\mathbf{i}) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\lambda + 2\mu n_x^2\right).$$

Denne er opplagt størst når $n_x = 1$ og vi får da samme spenning som ovenfor.

d) Her kan vi gå fram på ulike vis. Fra forrige punkt har vi uttrykk for $|p_n|$ og $\mathbf{p}$. Tangensialspenningen kan da finnes fra $p_T^2 = \mathbf{p}^2 - p_n^2$. Siden vi ikke skal ha retningen er det (litt) enklere å bruke kryssproduktet (der mye også faller bort)

$$|p_T| = |\mathbf{p} \times \mathbf{n}| = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| |2\mu n_x(n_y\mathbf{k} - n_z\mathbf{j})| = 2\mu \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \left|n_x\sqrt{n_y^2 + n_z^2}.\right|$$

Vi ser at $\sqrt{n_y^2 + n_z^2}$ er lengden av den delen av $\mathbf{n}$ som er normal x-aksen. Kaller vi vinkelen mellom $\mathbf{i}$ og $\mathbf{n}$ for θ får vi da ($n_x = \cos\theta$, $\sqrt{n_y^2 + n_z^2} = \sin\theta$)

$$|p_T| = |\mathbf{p} \times \mathbf{n}| = 2\mu \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| |\cos\theta \sin\theta| = \mu \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| |\sin(2\theta)|\,.$$

Vi ser at maksimal skjærspenning inntreffer når $\theta = \frac{\pi}{4}$ og blir

$$|p_T| = \mu \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|.$$

Det spiller ingen rolle hvordan $n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}$ er orientert.

e)

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = \left(\mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\mathbf{i}_j\mathbf{i}_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_i}\right)\mathbf{i}_k$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}(u_k \mathbf{i}_k)\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla^2\mathbf{u}\right).$$

Oppg. 2 .

a) Kontinutitetslikningen

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Altså avhenger ikke u av x.

b) Kontinuitetslikningen er oppfylt fra forrige punkt.
Navier-Stokes likning for en inkompressibel væske, uten volumkrefter

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{u}.$$

Strømmen er stasjonær slik at $\partial\mathbf{u}/\partial t = 0$. For det konvektive leddet får vi

$$x - \text{komponent}: \quad \mathbf{u} \cdot \nabla u = u\tfrac{\partial u}{\partial x} + V_0\tfrac{\partial u}{\partial y} = V_0\tfrac{\partial u}{\partial y}$$
$$y - \text{komponent}: \quad \mathbf{u} \cdot \nabla v = \mathbf{u} \cdot \nabla V_0 = 0$$

x og y -komponent av bevegelseslikningen blir da hhv.

$$
\begin{aligned}
V_0 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2}, \\
0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

Den nedre (y-komponenten) viser at p bare er en funksjon av x dvs. $p = p(x)$. Betingelsen $p = p_0$ for $y = 0$ gir da at $p = p_0$, og konstant, overalt mellom lagene.

x-komponenten av bevegelseslikningen blir da

$$
\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} - \frac{V_0}{\nu}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 0,
$$

som er en lineær førsteordenslikning for $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$. Løsning:

$$
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = A e^{\frac{V_0 y}{\nu}},
$$

der A er en konstant. Integrasjon gir

$$
u = B + \hat{A} e^{\frac{V_0 y}{\nu}},
$$

der B og $\hat{A}$ bestemmes fra randbetingelser

$$
\begin{aligned}
y = 0: &\quad 0 = u(0) = B + \hat{A} \\
y = h: &\quad U_0 = u(h) = B + \hat{A} e^{\frac{V_0 h}{\nu}}
\end{aligned}
$$

To likninger som løst for B og $\hat{A}$ gir

$$
u = U_0 \frac{e^{\frac{V_0 y}{\nu}} - 1}{e^{\frac{V_0 h}{\nu}} - 1}.
$$

c) Skjærspenningen er gitt ved

$$
\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \rho V_0 U_0 \frac{e^{\frac{V_0 y}{\nu}}}{e^{\frac{V_0 h}{\nu}} - 1}.
$$

For å finne arbeid per tid på området Ω må vi gange med hastighet og lengde av rand, samt sette inn h

$$
W_h = U_0 L \tau_{xy}(h) = \rho L V_0 U_0^2 \frac{e^{\frac{V_0 h}{\nu}}}{e^{\frac{V_0 h}{\nu}} - 1}.
$$

d) Tettheten per volum av kinetisk energi er $\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2)$. Strøm per tid (og bredde langs z) gjennom en flate normal på y aksen blir da $\frac{1}{2}\rho v L(u^2+v^2)$. Ved $y=0$ får vi en transport inn i volumet

$$Q_0 = \frac{1}{2}\rho L V_0^3,$$

mens vi ved $y=h$ får en transport ut

$$Q_h = \frac{1}{2}\rho L V_0 (U_0^2 + V_0^2).$$

e) Regner vi alt positivt inn i Ω har vi bidragene

$y=0$	strøm+arbeid= $Q_0 + p_0 L V_0$
$y=h$	strøm+arbeid= $-Q_h - p_0 L V_0 + W_h$
$x=x_0$ (venstre rand)	strøm+arbeid $= Q_l + W_l$
$x=x_0+L$ (høyre rand)	strøm+arbeid $= Q_r + W_r$

Fordi det ikke er noen variasjon med x vil transporten gjennom sidekantene av Ω heve hverandre, dvs. $Q_l + Q_r = W_l + W_r = 0$. Total transport av mekanisk energi inn i Ω blir da

$$W = Q_0 + p_0 L V_0 - Q_h - p_0 L V_0 + W_h = Q_0 - Q_h + W_h = \frac{1}{2}\rho L V_0 U_0^2 \frac{e^{\frac{V_0 h}{\nu}}+1}{e^{\frac{V_0 h}{\nu}}-1},$$

som alltid er positivt. Dette må tilsvare dissipasjonen per tid i Ω. Vi er ikke bedt om å regne den ut, men vi gjør det likevel i dette løsningsforslaget. Først

$$\Delta = 2\mu\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} = 2\mu\left(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{21}^2\right) = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Fordi Δ ikke avhenger av x er den totale dissipasjonen per tid

$$\Delta_T = L\int_0^h \Delta dy = \mu L \int_0^h \frac{V_0^2 U_0^2}{\nu^2 (e^{\frac{V_0 h}{\nu}}-1)^2} e^{2\frac{V_0 y}{\nu}} dy = \mu L \frac{V_0 U_0^2}{\nu (e^{\frac{V_0 h}{\nu}}-1)^2}\left(e^{2\frac{V_0 h}{\nu}}-1\right) = \frac{1}{2}\rho L V_0 U_0^2 \frac{e^{\frac{V_0 h}{\nu}}+1}{e^{\frac{V_0 h}{\nu}}-1}$$