UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 105 — Viskøse væsker og elastiske stoffer.
Eksamensdag:	Lørdag 14. desember 1991.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

I et kartesisk koordinatsystem x, y, z er spenningstensoren gitt ved

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} p_1 & \tau & 0 \\ \tau & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{Bmatrix}$$

hvor p_1, p_3 og τ er konstanter.

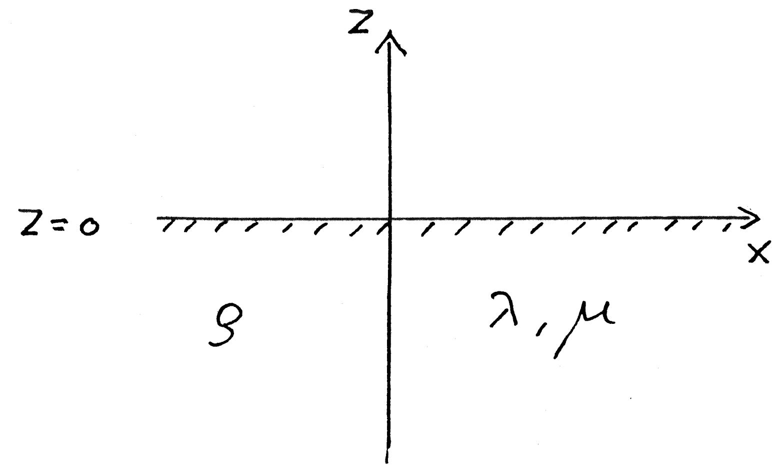
a) Finn spenningen på plan med normalvektor $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})/\sqrt{2}$ hvor $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$ er enhetsvektorene henholdsvis i x og y retning.

b) Bestem normalspenningen og tangensialspenningen på flaten gitt i a).

c) Finn hovedspenningene og hovedspenningsretningene.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.



Vi betrakter et to-dimensjonalt forrykningsfelt i et homogent elastisk medium som følger Hookes lov. Mediet har plan overflate $z = 0$ og fyller rommet $z < 0$. Tettheten i mediet er ρ og Lamée elastisitets koeffisienter er λ og μ. Forrykningsfeltet er gitt ved $\boldsymbol{u} = \{0, u_z(z,t)\}$ hvor forrykningen i z-retning, u_z, bare er funksjon av z og tiden, t.

a) Vis at u_z oppfyller likningen

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}$$

hvor c er en konstant som skal bestemmes.

b) Vis at likningen under a) har løsning

$$u_z = f(\xi)$$

hvor $f(\xi)$ er en vilkårlig deriverbar funksjon av $\xi = z + ct$. Hvordan tolker du denne løsningen fysikalsk?

c) Finn spenningen på overflaten $z = 0$, og bestem funksjonen $f(\xi)$ når det på overflaten av mediet virker en trykkpuls.

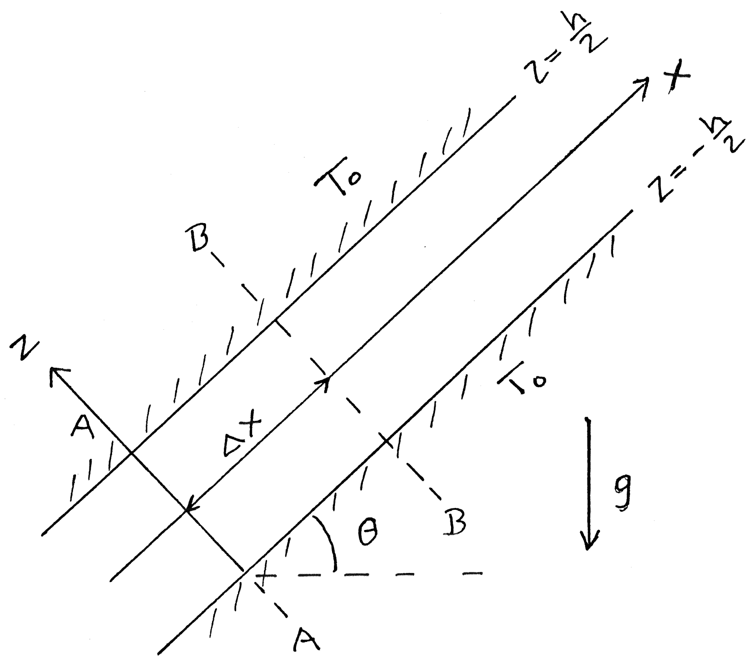
$$\begin{aligned} p_0 &= 0 & t &< 0 \\ p_0 &= p_m(1 - \alpha t)e^{-\alpha t} & t &\geq 0 \end{aligned}$$

hvor p_m og α er konstanter. Hint: $\frac{d}{dt}\left(te^{-\alpha t}\right) = (1 - \alpha t)e^{-\alpha t}$.

d) Beregn den totale energien pr. flateenhet i $x-y$ planet som mediet blir tilført som følge av trykkpulsen gitt i c. Svaret kan uttrykkes ved et integral som ikke kreves utregnet.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3.



Vi betrakter to-dimensjonal rettlinjet og stasjonær strøm av en homogen inkompressibel viskøs væske mellom to parallelle plan i avstand h fra hverandre. Helningsvinkelen i forhold til horisontalen er θ. Strømmen skal beskrives i et aksekors x, z som er orientert slik som figuren viser. Strømmen er drevet av tyngdens akselerasjon g og en konstant trykkgradient i x-retning $\beta = -\frac{\partial p}{\partial x}$ hvor p er trykket i væsken.

Væskens tetthet er ρ og viskositetskoeffisienten er $\mu = \rho\nu$. Varmediffusiviteten i væsken er κ og den spesifike varmekapasiteten er c. Vi antar at hastighetsfeltet er gitt ved $\boldsymbol{v} = u(z)\boldsymbol{i}$ hvor i er enhetsvektoren i x-retning.

a) Sett opp bevegelseslikningen og bestem hastighetsprofilen $u = u(z)$ og trykket i væsken når trykket i origo er p_0.

b) Bestem størrelse og retning av skjærspenningene på planene $z = \pm\frac{h}{2}$ og beregn volum strømmen pr. tidsenhet mellom planene.

c) Finn energidissipasjonen $\Delta = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}^2$, pr. volumenhet og tidsenhet i et vilkårlig punkt i væsken.

d) Sett opp varmetransportlikningen for væsken. Vi antar at energidissipasjonen er eneste varmekilde. Bestem temperaturen $T = T(z)$ når begge sideveggene har temperaturen T_0.

e) Finn arbeidet som utføres pr. tidsenhet av spenningskreftene og tyngden på væskemengden mellom snittflatene $A{-}A$ og $B{-}B$. Snittflatene står vinkelrett på planene, avstanden mellom dem er Δx. Uttrykk svaret med volumstrømmen Q.

SLUTT