UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 105 — Viskøse væsker og elastiske stoffer.
Eksamensdag:	Lørdag 12. desember 1992.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) Utled Cauchys andre relasjon for et todimensjonalt stoff.

b) Et todimensjonalt stoff har spenningstensoren

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} Ax & Bxy \\ Bxy & Cy \end{pmatrix}$$

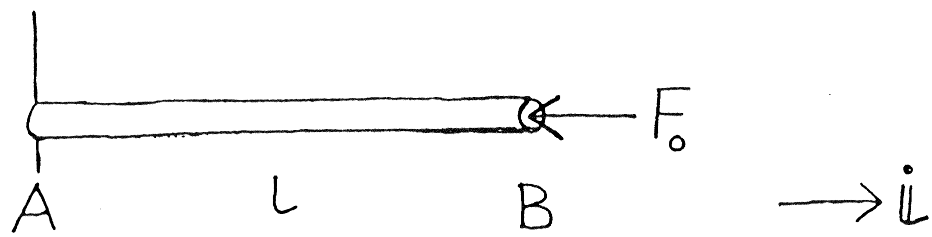
der A, B og C er konstanter. Stoffet ligger innenfor sirkelkonturen S gitt ved $x^2 + y^2 = R^2$. Finn spenningskraften på konturen S.

c) Sett $A = B = 0$. Finn maksimal skjærspenning i stoffet.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

En tynn stav av et isotropt og homogent elastisk stoff har lengde l og sirkulært tverrsnitt med areal q. Lamé-konstantene til staven er λ og μ, E er Youngs elastisitetsmodul. Staven er festet til en vegg i A. En kraft $-F_0\boldsymbol{i}$ angriper i B. Vi ser bort fra "endeeffekter" ved A og B og antar at forrykningene til staven er lineære.



a) Sett opp spenningstensoren til staven uttrykt ved F_0 og q.

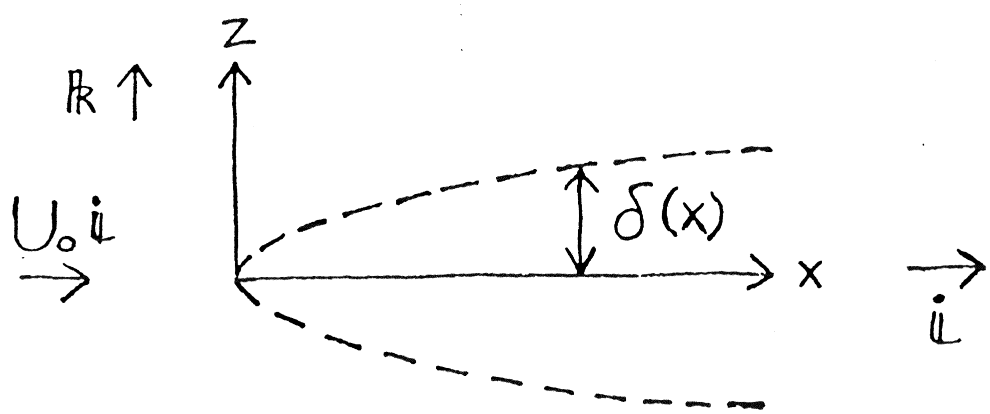
b) Finn forrykningsfeltet til staven.

c) Finn volumendringen.

d) Kraften som angriper i B, kan øke gradvis fra verdien 0 til verdien F_0. Finn arbeidet denne kraften utfører under dette forløpet.

Oppgave 3.

Ei homogen Newtonsk væske med dynamisk viskositetskoeffisient μ og tetthet ρ strømmer forbi ei uendelig tynn horisontal plate som ligger i den positive x-aksen. Strømningen er inkompressibel. For $x < 0$ er væskehastigheten $\boldsymbol{v} = U_0\boldsymbol{i}$. Det er stasjonære forhold. Ved plata dannes et tynt grensesjikt med tykkelse $\delta(x)$. La hastigheten skrives ved $\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + w\boldsymbol{k}$.



(Fortsettes side 3.)

a) Sett opp bevegelsesligningen som gjelder i grensesjiktet, og bruk antakelsene ovenfor til å forenkle denne ligningen.

Sett opp randkravene ved $z = 0$ og $z = \delta(x)$.

b) Det kan vises at

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{\partial}{\partial x}\Big(u^2 - U_o u\Big)dz = -\frac{\tau_0(x)}{\rho} \tag{1}$$

gjelder for $x > 0$, der $\tau_o(x)$ representerer skjærspenningen ved plata.

Anta så at u for $x > 0$ er gitt ved

$$u = \begin{cases} U_0 \dfrac{z}{\delta(x)} & 0 < z < \delta(x) \\ U_0 & \delta(x) \le z \end{cases} \tag{2}$$

(Vi ser bort fra virkningen av diskontinuiteten i skjærspenningen ved $z = \delta(x)$.)

Bruk (1) og (2) til å finne $\delta(x)$.

c) Vi antar også i dette punktet at u er gitt ved (2). Finn den vertikale hastigheten w uttrykt ved U_0 og $\delta(x)$.

d) Utled ligningen (1).

SLUTT