UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 105 — Viskøse væsker og elastiske stoffer.
Eksamensdag:	Lørdag 11. desember 1993.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

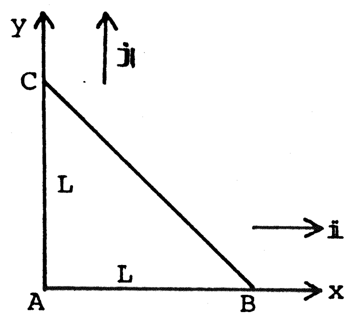
a) Definér spenning.

   Hva menes med normalspenning?

   Hva menes med skjærspenning?

b) Utled Cauchys første relasjon for et todimensjonalt stoff.

c) Vi betrakter et todimensjonalt volumelement som er en likebeinet trekant med hjørner ABC, der de to like sidene har lengde L og faller sammen med x- og y-aksen, se figur 1.



Figur 1.

(Fortsettes side 2.)

Et todimensjonalt forrykningsfelt er gitt ved $\boldsymbol{u} = ax\boldsymbol{j}$ ($a > 0$). Tegn opp hvordan trekanten deformeres av dette forrykningsfeltet.

Finn lengden av BC etter deformasjonen.

Finn volumendringen av volumelementet (trekanten).

Finn tøyningstensoren.

d) Et todimensjonalt forrykningsfelt er gitt ved $\boldsymbol{u} = ax\boldsymbol{i}$ ($a > 0$). Tegn opp hvordan trekanten i figur 1 deformeres av dette forrykningsfeltet.

Finn lengden av BC etter deformasjonen.

Finn volumendringen av trekanten.

Finn tøyningstensoren.

Oppgave 2.

Et homogent isotropt elastisk stoff av ubegrenset utstrekning har tetthet ρ og elastisitetsparametre λ og μ. Det er ingen ytre krefter. Det er ingen forrykninger i mediet for $t \to -\infty$. Ved planet $x = 0$ inntreffer en forrykning gitt ved

$$\boldsymbol{u} = \frac{u_0}{\alpha + t^4}\boldsymbol{i}\,,$$

der u_0 og α ($\alpha > 0$) er konstanter og $\boldsymbol{i}$ er enhetsvektoren i x-retning. Vi antar at u_0 er liten slik at forrykningene i stoffet kan regnes som lineære. Anta at forrykningsfeltet i stoffet er på formen $\boldsymbol{u} = u(x,t)\boldsymbol{i}$.

a) Finn ligningen som bestemmer $u(x,t)$, og vis at løsningen er på formen

$$u = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

b) Bestem c.

c) Finn den eksplisitte formen på $u(x,t)$.

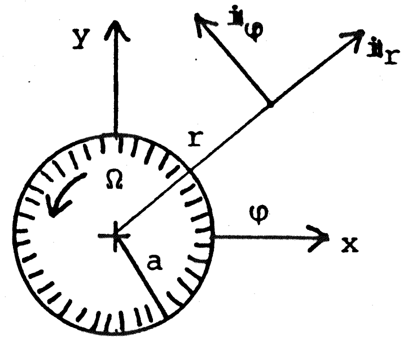
Hvordan er løsningen når $x > 0$?

Hvordan er løsningen når $x < 0$?

d) Finn den elastiske energien i stoffet.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3.



Figur 2.

En sirkulær sylinder med radius a er omgitt av homogen, inkompressibel Newtonsk væske med tetthet ρ og dynamisk viskositetskoeffisient μ. Sylinderen roterer med konstant vinkelhastighet Ω om sylinderaksen. Væskebevegelsen er todimensjonal og stasjonær. Det er fullstendig heft ved sylinderen. Væskehastigheten i en avstand uendelig langt unna sylinderen er lik null. Det er ingen ytre krefter. Anta at væskehastigheten er på formen $\boldsymbol{v} = u(r)\boldsymbol{i}\varphi$. ∇-operatoren i sylinderkoordinater er $\nabla = \boldsymbol{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{i}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$.

a) Finn $u(r)$.

b) Finn trykket i væska.

c) Vis ved regning at dissipasjonen er gitt ved $\Delta = 4\mu\Omega^2 a^4 r^{-4}$, der r er den radielle avstanden fra sylinderaksen til et punkt i væska. (Det kan lønne seg å anvende kartesiske koordinater under dette punktet.)

d) Sylinderen har en konstant temperatur T_0. Anta at temperaturen i væska har formen $T(r)$, at temperaturen er stasjonær i tiden, og at den er begrenset. Væskas spesifikke varmekapasitet er c. Varmediffusiviteten er κ. Det er ingen andre varmekilder enn dissipasjonen. Finn temperaturen i væska.

SLUTT