# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | ME 105 — Viskøse væsker og elastiske stoffer. |
| Eksamensdag: | Mandag 10. desember 1990. |
| Tid for eksamen: | 09.00 – 15.00. |
| Oppgavesettet er på 3 sider. | |
| Vedlegg: | Ingen. |
| Tillatte hjelpemidler: | Rottmann: Matematische Formelsammlung. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

## Oppgave 1.

Gitt en to-dimensjonal spenningstilstand i $xz$-planet med tilhørende spenningstensor

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{Bmatrix}$$

hvor $P_1, P_2$ er konstanter.

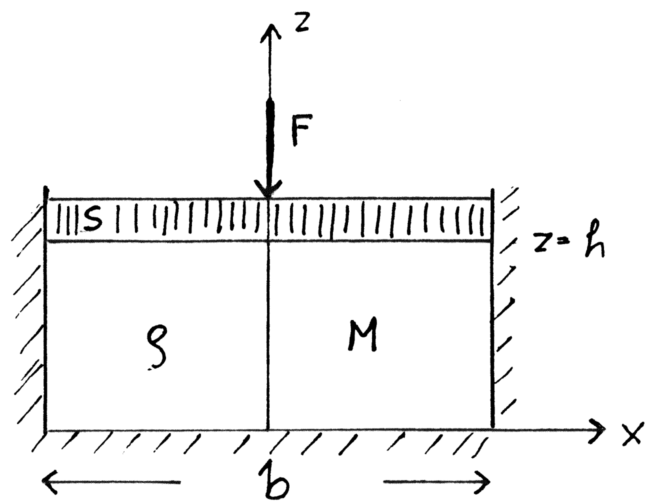
(a) Sett opp prinsipalspenningskomponentene og prinsipalspenningsretningene.

(b) Finn spenningene på en flate hvor flatenormalen danner vinkelen $\varphi$ med $x$-aksen.

(c) Finn retningen og størrelsen av den maksimale skjærspenning.

*(Fortsettes side 2.)*

# Oppgave 2.




Et homogent elastisk materiale ($M$) med tetthet $\rho$ og Lamée elastisitetskoeffisienter $\lambda$ og $\mu$ fyller en fast rektangulær form og deformeres av et stempel ($S$) som vist på figuren. Det elastiske materialet har bredde $b$ og høyde $h$ og er festet til bunnen av forma og til stemplet. Langs sideveggene i formen kan det elastiske materialet gli uten heft. Stemplet skyves med en kraft $F$. Vi regner to-dimensjonalt ($x, z$-planet) og ser bort fra tyngdekraften. Forrykningene regnes små.

(a) Sett $F = F_0$, hvor $F_0$ er en konstant og anta at forrykningen har forma

$$\boldsymbol{u} = \{0, u_0(z)\}$$

Finn forrykningen og spenningstensoren.

(b) Sett $F = F_0 + F_1 \sin \omega t$ hvor $F_0, F_1$ og $\omega$ er konstanter og $t$ er tiden. Anta at forrykningen kan skrives

$$\boldsymbol{u} = \{0, u(z,t)\}$$

hvor $u(z,t) = \frac{F_0 z}{b(\lambda+2\mu)} + \hat{u}(z) \sin \omega t$.

Vis at differensiallikningen til bestemmelse av funksjonen $\hat{u}(z)$ kan skrives

$$\frac{d^2\hat{u}}{dz^2} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{u}$$

hvor $c = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$.

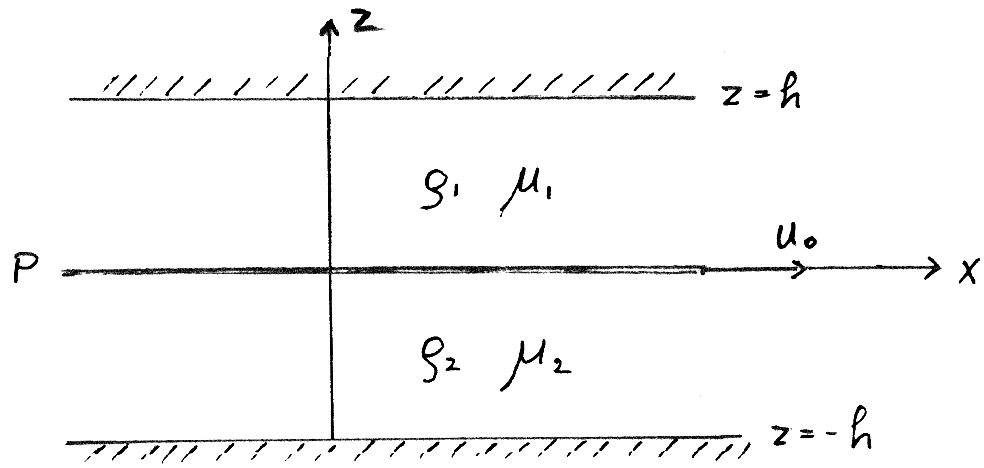
(c) Formuler grenseflatebetingelsene for $\hat{u}$ ved $z = 0$ og $z = h$ for det elastiske materialet. Løs differensiallikningen for $\hat{u}$ og bestem forrykningsfeltet.

*(Fortsettes side 3.)*

(d) Finn kreftene som virker på bunn og på sideflatene i forma.

(e) Hva skjer når $\frac{\omega}{c}h = n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$? Kommenter svaret.

## Oppgave 3.




To homogene inkompressible væsker henholdsvis med tetthet $\rho_1$ og $\rho_2$ og viskositetskoeffisienter $\mu_1$ og $\mu_2$ ligger mellom to plane vegger ved $z = h$ og $z = -h$ og er skilt ved en tynn plate $P$ i planet $z = 0$ som vist på figuren. Platen trekkes med en konstant hastighet $u_0$ i $x$-retning. Det er stasjonære forhold og ingen trykkgradienter i væskene. Vi ser bort fra tyngdens virkning.

(a) Bestem hastigheten i væskelagene.

(b) Finn kraften (pr. flateenhet) som må brukes for å trekke platen og bestem arbeidet pr. tidsenhet og flateenhet som utføres.

(c) Beregn energidissipasjonen i væskelagene og begrunn hvorfor energidissipasjonen er lik arbeidet som utføres for å dra platen.

(d) Vi antar at energidissipasjonen er eneste varmekilde i væskelagene og at det er ingen varmestrøm gjennom platen $P$ fra det ene laget til det andre. Veggene ved $z = h$ og $z = -h$ holdes på konstant temperatur $T_0$. Varmediffusiviteten i de to væskelagene er h.h.v. $\kappa_1$ og $\kappa_2$ og den spesifike varmekapasiteten er $c_1$ og $c_2$.

Formuler varmetransportlikningen for de to lagene og bestem temperaturprofilen $T(z)$.

SLUTT