

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 115 — Viskøse væsker og elastiske stoffer.
Eksamensdag:	Onsdag 8. juni 1994.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på	3 sider.
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematiske Formelsammling.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

### Oppgave 1.

- Skriv opp i indeksnotasjon Navier-Stokes likning og varmetransportlikning for en homogen inkompressibel væske og forklar kort hva leddene betyr fysikalsk. Utledning kreves ikke. Tyngdekraften antas å være eneste ytre kraft.
- Gjennomfør skalering av likningene og bestem de tre dimensjonsløse tallene: Reynoldstall, Froudetall og Pécletall.
- Gi en tolkning av disse tallene og forklar hvordan de kan brukes til å klassifisere forskjellige strømfenomener.
- Hvordan må man innrette seg for å oppnå similaritet ved modellforsøk?

### Oppgave 2.

I et ubegrenset homogent elastisk stoff som følger Hooke's lov kan det opp-  
tre to bølgetyper. Tetthet og elastisitetsparametrene betegnes henholdsvis  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ .

- Anta at bølgene forplanter seg i  $x$ -retning. Utled bølgelikningene for plane bølger av begge typer.

Påvis bølgeløsninger. Definer størrelsene bølgetall, bølgelengde, vinkel-  
hastighet og periode og finn bølgenes forplantningshastighet.

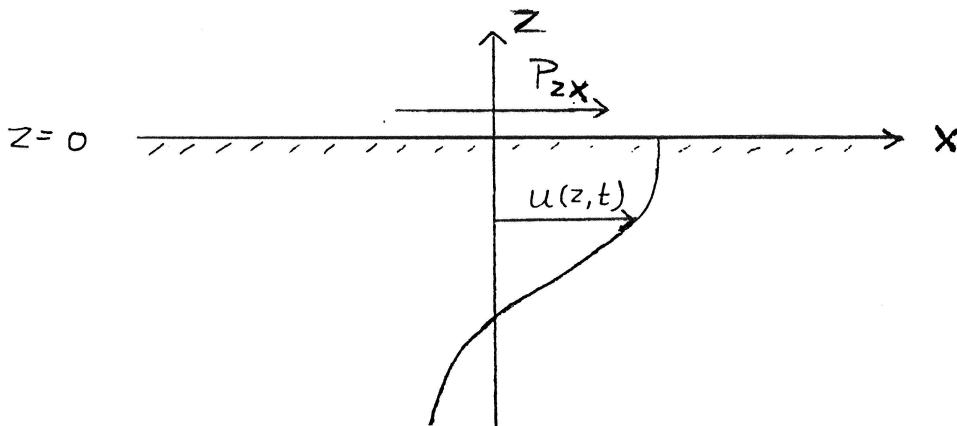
(Fortsettes side 2.)

Vi antar så at  $x = 0$  representerer en skilleflate mellom to homogene elastiske stoffer med forskjellig tetthet og elastisitetsparametere henholdsvis  $\rho_1, \lambda_1, \mu_1$  for  $x < 0$  og  $\rho_2, \lambda_2, \mu_2$  for  $x > 0$ . En plan elastisk bølge med amplitude  $I$ , bølgetall  $k$  og vinkelhastighet  $\omega$  kommer normalt inn mot skilleflaten fra siden  $x < 0$ .

- b) Bestem amplitude og bølgelengde for de reflekterte og transmitterte bølgene. Beregningen skal gjennomføres med innkommende bølger av begge bølgetyper.
- c) Vis ved beregninger hvordan refleksjonen blir dersom stoffet  $x < 0$  grenser inn til
  - i) en fast flate ved  $x = 0$
 og
  - ii) en fri overflate ved  $x = 0$ .

### Oppgave 3.

Vi betrakter plan strømning (i  $xz$ -planet) av en homogen inkompressibel Newtonsk væske. Væsken fyller rommet  $z < 0$  og overflaten  $z = 0$  av væsken er plan og horisontal.



Langs overflaten virker en skjærspenning som varierer periodisk i tiden gitt ved  $P_{zx} = \tau_0 \sin \omega t$  hvor  $\tau_0$  og  $\omega$  er konstanter og  $t$  er tiden. Det er ingen trykkgradienter i væsken og vi antar at væsken er i ro for  $z \rightarrow -\infty$ .

- a) Sett opp differensiallikningen for strømhastigheten i væsken,  $u(z, t)$ , når vi forutsetter strømmen er parallell med  $x$ -aksen. Formuler randbetingelsene ved  $z = 0$  og  $z = -\infty$ .
- b) Vis at differensiallikningen har løsning av formen

$$u(z, t) = Ae^{kz} \cos(\omega t + kz + \theta)$$

og bestem konstantene  $A, k$  og  $\theta$ .

(Fortsettes side 3.)

c) Bestem konstantene  $\theta$  og  $A$  dersom en ved overflaten har gitt at  $u(z = 0, t) = u_0 \sin \omega t$  hvor  $u_0$  er konstant.

d) Dersom en ser bort fra virkningen av energidissipasjonen er det en analogi mellom diffusjonsprosessen i a)–c) og diffusjon av varme.

Vis dette og bruk det til å bestemme temperaturprofilen i væsken når temperaturen på overflaten er  $T(z = 0, t) = T_0 + \Delta T \sin \omega t$  og temperaturen i dypet  $z \rightarrow -\infty$  er  $T(z = -\infty, t) = T_0$ . Her er  $T_0$  og  $\Delta T$  konstanter og varmediffusiviteten betegnes med  $\kappa$ .

e) I analogi med bølgebevegelse kan man si at temperatursvingningene på overflaten brer seg nedover i væsken med en karakteristisk hastighet.

Hva er uttrykket for denne karakteristiske hastigheten?

SLUTT