UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	ME 115 — Viskøse væsker og elastiske stoffer.
Eksamensdag:	Fredag 7. juni 1996.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

a) Utled energilikningen for den mekaniske energien for et kontinuerlig medium

$$\frac{D}{dt}(T+V) = \frac{v_i}{\rho}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}$$

hvor T og V er henholdsvis kinetisk og potensiell energi pr. masseenhet, P_{ij} er spenningstensoren, v_i er hastighetsvektoren og ρ er massetettheten.

b) Vis at spenningskreftenes totale arbeid pr. masseenhet og tidsenhet er

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(v_i P_{ij})}{\partial x_j}$$

c) Sett opp energilikningen for den totale energien $T + V + E$, hvor E er den indre energi pr. masseenhet.

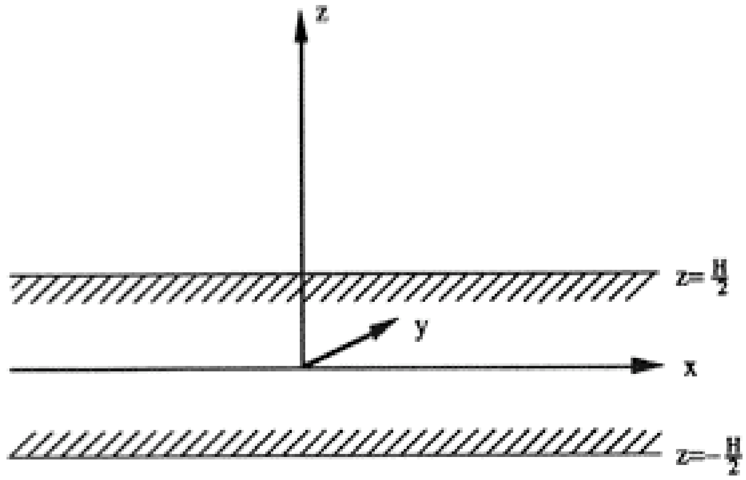
d) Finn likningen for den indre energien.

e) Finn uttrykket for energidissipasjonen, Δ, i en homogen inkompressibel Newtonsk væske. Forklar hva som menes med energidissipasjon i viskøse væsker.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Et jevntykt homogent elastisk lag med tykkelse H har tetthet ρ og elastisitetskonstanter μ og λ. Vi innfører et kartesisk koordinatsystem



med z-aksen normalt laget, x-aksen langs midtlinjen i laget og y-aksen på tvers slik som vist på figuren. Vi antar at forrykningen (forskyvningen) kan skrives $\mathbf{u} = \{0, u_y(x,z,t), 0\}$. Det er ingen volumkrefter.

a) Vis at u_y oppfyller likningen

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = c_T^2 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right)$$

og bestem konstanten c_T.

b) Formuler grenseflatebetingelsen for u_y når
1) overflatene av laget ved $z = \pm\frac{H}{2}$ er spenningsfrie
2) overflaten ved $z = -\frac{H}{2}$ holdes fast mens overflaten $z = +\frac{H}{2}$ er spenningsfri.

c) Anta bølgeløsninger av formen

$$u_y = \widehat{u}(z) \sin k(x - ct)$$

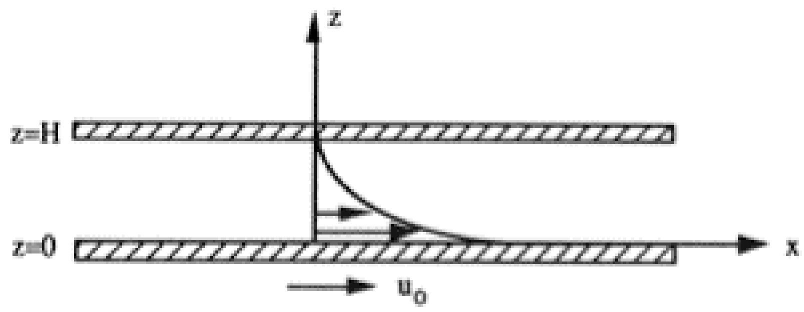
hvor k og c er positive konstanter og $\widehat{u}(z)$ er en funksjon av z.
Finn mulig løsning for $\widehat{u}(z)$ med randbetingelsene 1) og 2) i b) under forutsetning at $c = c_T$.

d) For $c > c_T$ finnes det flere typer løsninger. Med randbetingelsen 1) i b) er det både symmetriske og antisymmetriske løsninger med hensyn xy-planet.
Finn de antisymmetriske løsningene og bestem tilhørende c. Maksimalforrykning settes u_0.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3

Et homogent inkompressibelt væskelag med Newtonsk væske er begrenset av to parallelle plater henholdsvis ved $z = 0$ og $z = H$.



Væsken og platene er i ro ved tiden $t < 0$. Ved tiden $t = 0$ settes platen ved $z = 0$ plutselig i bevegelse med hastighet u_0 i x-retning. Dette setter etterhvert også væsken mellom platene i plan to-dimensjonal bevegelse. Vi antar at viskositeten er så stor at det ikke utvikler seg ustabiliteter og turbulens og at det ikke er horisontale trykkgradienter i væsken. Hastigheten i væsken kan derfor skrives $\mathbf{v} = \{u(z,t), 0\}$. Viskositetskoeffisient og tettheten i væsken betegnes henholdsvis med ν og ρ. Det er ingen volumkrefter.

a) Vis at hastigheten i væsken oppfyller likningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

b) Anta først at det har gått så lang tid at det har innstilt seg stasjonære forhold. Bestem strømprofilen i dette tilfellet.

c) Finn arbeidet pr. tids- og flateenhet som platen ved $z = 0$ utfører på væsken for tilfellet i b).

d) Velg naturlig lengdeskala og hastighetskala for likningen i a). Tidsskalaen kaller vi t_s. Innfør dimensjonsløse størrelser og bring likningen på dimensjonsløs form.
Hvordan må tidsskalaen, t_s, være for at likningen skal få en stasjonær løsning slik som funnet i b)?