UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	ME 115 — Viskøse væsker og elastiske stoffer.
Eksamensdag:	Fredag 6. juni 1997.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

I en to-dimensjonal spenningstilstand er spenningstensoren gitt i et kartesisk aksekors (x, y) ved:

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{Bmatrix}$$

hvor σ_1 og σ_2 er konstanter. $(\sigma_1 > \sigma_2)$

a) Finn spenningen på en flate hvor normalvektoren danner en vinkel φ med x-aksen.

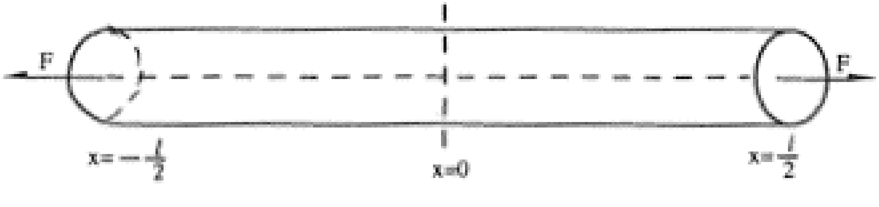
b) Finn normalspenningen og tangensialspenningen (skjærspenningen) på samme flate.

c) Finn vinkelen $\varphi = \varphi_0$ som gir maksimal skjærspenning.
Hvor stor er da normalspenningen?

d) Finn komponentene i spenningstensoren $\mathcal{P}'$ i et kartesisk aksekors (x', y') hvor x' faller langs normalvektoren definert i a.

Oppgave 2

En sirkulær jevntykk og homogen elastisk stav har lengde ℓ og tverrsnittsareal q. På endeflatene av staven virker like store og motsatt rettet krefter F. Vi tenker oss x-aksen plassert langs stavens lengdeakse med origo midt på staven



(Fortsettes på side 2.)

Vi antar små forskyvninger (forrykninger) og lineært elastisk stoff. Det virker ingen volumkrefter på staven. Massetettheten for staven er ρ og Youngs elastisitetsmodul er E.

a) Anta først at $F = F_0$ (konstant) og at staven er i likevekt. Hva er spenningen (σ) på en snittflate normalt stavaksen?

b) Bestem forskyvningen (forrykningen) i stavens lengderetning som funksjon av x.

c) Vi antar så at kreftene F er periodiske funksjoner av tiden (t) gitt ved

$$F = F_0 \sin \omega t$$

hvor vinkelhastigheten ω er gitt. Vis at forskyvningen (forrykningen) i stavens lengderetning $u(x,t)$ oppfyller likningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

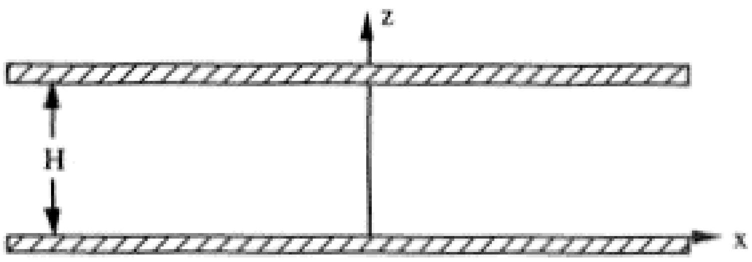
d) Formuler randbetingelsene for $u(x,t)$ ved $x = \pm\frac{\ell}{2}$.

e) Anta at løsning av likningen for $u(x,t)$ er av formen $u(x,t) = \widehat{u}(x) \sin \omega t$ hvor $\widehat{u}(x)$ er en funksjon bare av x. Bestem funksjonen $\widehat{u}(x)$.

f) Hvilken betingelse må være oppfylt for at løsningen av det tidsavhengige problemet c)–e) skal ha tilnærmet samme avhengighet av x som likevektsløsningen i a)–b)?

Oppgave 3

Vi skal studere varmetransport i et væskelag mellom to horisontale plater. Væsken er homogen og inkompressibel, med tetthet ρ og spesifikk varmekapasitet c. Varmeledningstallet er k og varmediffusivitetskoeffisienten er κ. Vi begrenser oss til to dimensjoner og legger x-aksen langs nedre plate med z-aksen vertikalt. Avstanden mellom platene er H.



a) Skriv opp varmetransportlikningen på generell form og forklar hva de forskjellige leddene står for. Utledning av likningen kreves ikke.

(Fortsettes på side 3.)

b) Vi antar at det ikke er strøm i væsken og at temperaturen på platen ved $z = 0$ er $T = T_0 + \Delta T \sin ax$ hvor T_0, ΔT og a er gitte konstanter uavhengig av tiden. Temperaturen på platen $z = H$ er T_0. Det er ingen varmekilder i væsken ($Q = 0$).

Vis at dersom vi antar stasjonære forhold vil varmetransportlikningen redusere seg til

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Anta løsning $T = T_0 + \widehat{T}(z) \sin ax$ hvor $\widehat{T}(z)$ er en funksjon bare av z og finn temperaturfordelingen i væsken.

c) Sett opp Fouriers lov i to dimensjoner (bevis kreves ikke) og beregn varmestrømmen fra platen og inn i væsken som funksjon av x.

d) Vi antar nå at platen ved $z = H$ beveger seg i x-retning med konstant hastighet u_0 og det er ingen trykkgradienter i væsken. Vi forutsetter stasjonære forhold.
Vis at varmetransportlikningen kan skrives

$$\frac{u_0 z}{H\kappa}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\kappa c}\left(\frac{u_0}{H}\right)^2$$

e) Sett konstanten a fra grenseflatebetingelsen i b) $a = \frac{1}{H}$. Velg naturlig skala for lengde, temperatur og hastighet, innfør dimensjonsløse variable og bring likningen i d) over på dimensjonsløs form.

f) Finn en løsning av den skalerte likningen som er gyldig for små Péclettall med de samme randbetingelsene (skalert) som i b). [Hint: Sett
$T = \widetilde{T}(z) + \widehat{T}(z) \sin \frac{x}{H}$ der $\widetilde{T}$ er et polynom, husk å skalere.]

SLUTT