# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | ME 115 — Viskøse væsker og elastiske stoffer. |
| Eksamensdag: | Mandag 8. juni 1998. |
| Tid for eksamen: | 09.00 – 15.00. |
| Oppgavesettet er på 3 sider. | |
| Vedlegg: | Ingen. |
| Tillatte hjelpemidler: | Rottmann: Matematische Formelsammlung. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

## Oppgave 1.

I et kartesisk koordinatsystem $x, y, z$ er spenningstensoren gitt ved

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} 0 & \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

hvor $\tau_1$ og $\tau_2$ er konstanter.

a) Finn spenningen på en flate med normalvektor $\mathbf{n} = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{k}$ hvor $\mathbf{i}$ og $\mathbf{k}$ er enhetsvektorer henholdsvis langs $x$- og $z$-aksen og $\phi$ er en vilkårlig vinkel.

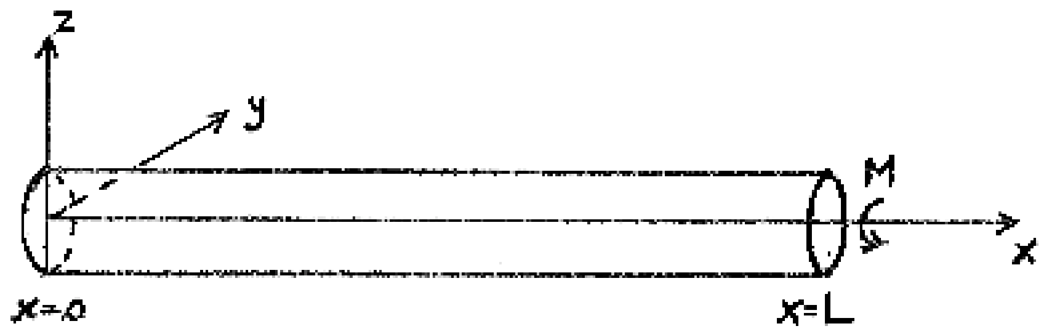
b) Bestem normal- og tangensialspenningen på flaten gitt i a). For hvilken verdi av $\phi$ har tangensialspenningen sin maksimale verdi?

c) Finn hovedspenningene og hovedspenningsretningene for tensoren $\mathcal{P}$

## Oppgave 2.

En jevntykk sirkulær sylindrisk stav har radius $a$ og lengde $L$. Den består av et ideelt homogent elastisk materiale med tetthet $\rho$ hvor Lamés elastisitetsparametrene er $\lambda$, $\mu$. Vi legger $x$ aksen langs stavens senterlinje med $y$ og $z$ aksen i tverrsnittsplanet i den ene enden slik som vist på figuren.

*(Fortsettes side 2.)*




Staven er spent fast i enden $x = 0$ og den utsettes for et vridningsmoment $M$ i enden $x = L$. Vi forutsetter at vridningsvinkelen er liten og at tverrsnittsplan forblir normal til senteraksen under vridningen. Det er ingen ytre krefter bortsett fra vridningsmomentet på randen i enden $x = L$. Vi forutsetter stasjonær (likevekt) tilstand.

a) Vis at forskyvningsfeltet (forrykningsfeltet) $\mathbf{u} = qx(-z\mathbf{j} + y\mathbf{k})$ er en mulig løsning av de elastiske likevektslikningene. $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ er enhetsvektorer henholdsvis langs $y$ og $z$ aksen og $q$ er en konstant.

b) Finn komponentene i spenningstensoren som tilsvarer forskyvningsfeltet (forrykningsfeltet) i a).

c) Formuler grenseflatebetingelsene på sideflaten og endeflaten $x = 0$ av sylinderen og vis at disse er oppfylt med det gitte forskyvningsfeltet (forrykningsfeltet).

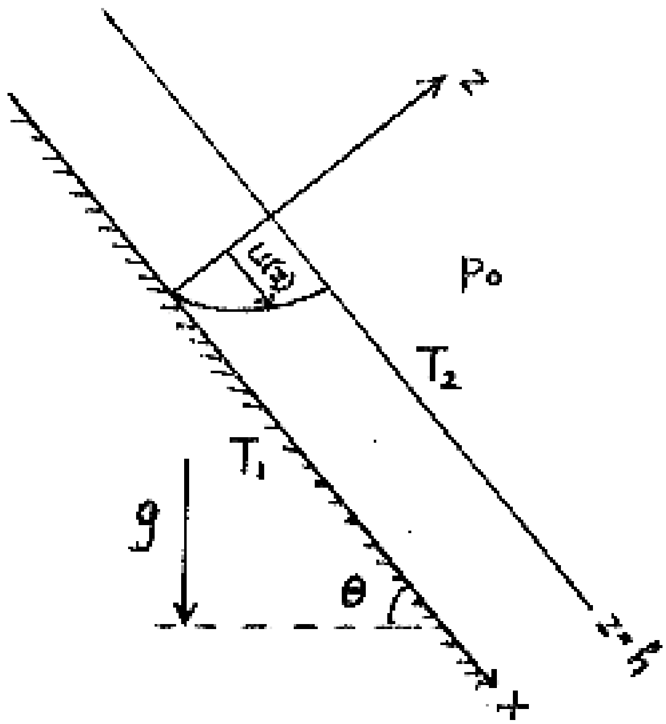
d) Vis at vridningsmomentet ved $x = L$ er $M = \frac{\pi}{2}\mu q a^4$ og bestem vridningsvinkelen $\theta_0$ ved endeflaten $x = L$ uttrykt ved $M, \mu, a$ og $L$.

e) Vi skjærer sylinderen med et snittplan parallelt med $y$ aksen og normalen til snittflaten har normalvektor $\mathbf{n} = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{k}$. For hvilken verdi av $\phi$ får vi maksimal størrelse av skjærspenningen? [Hint: Jamfør oppgave 1.]

## Oppgave 3.

Et jevntykk lag av en inkompressibel viskøs væske strømmer nedover et skråplan som har helningsvinkel $\theta$ med horisontalplanet. Tykkelsen av væskelaget er $h$ og tyngdeakselerasjon er $g$. Vi legger $x$-aksen langs planet og $z$-aksen normalt til planet slik som vist på figuren

*(Fortsettes side 3.)*




Vi antar at viskositeten er så stor at væskestrømmen er stasjonær og rettlinjet og at strømkomponenten i $x$-retning $u(z)$ bare er en funksjon av $z$. Det virker ingen andre ytre krefter en tyngden og vi antar at det ikke er trykkgradienter i $x$-retning i væsken eller skjærspenninger på væskeoverflaten ved $z = h$.

a) Vis at skjærspenningen i væsken $P_{xz} = \mu \frac{du}{dz}$ hvor $\mu$ er den dynamiske viskositetskoeffisienten.

b) Vis fra bevegelseslikningen at

$$\frac{d}{dz}\left(\mu \frac{du}{dz}\right) = -\rho g \sin\theta$$

Sett $\mu = \mu_0 =$ konstant og finn strømprofilen og bestem skjærspenningen på planet ($z = 0$).

c) Bestem trykket i væskelaget når lufttrykket over er $p_0$.

d) Likningen i b) gjelder også om $\mu$ er en funksjon av $z$. Sett $\mu = \mu_0 e^{\alpha z}$ hvor $\mu_0$ og $\alpha$ er konstanter og bestem strømprofilen og skjærspenningen på planet ($z = 0$).

e) Vi antar at variasjonen i viskositeten skyldes temperaturvariasjon i væsken. Bestem temperaturprofilen $T(z)$ dersom temperaturen $T_1$ ved planet $z = 0$ og temperaturen $T_2$ ved overflaten $z = h$ holder seg konstant (stasjonære forhold). Vi ser bort fra dissipasjonsvarmen og det er ingen andre varmekilder i væsken.

f) Hvordan må viskositeten variere med temperaturen, $\mu = \mu(T)$, for at vi skal få en variasjon i $\mu$ med $z$ slik som forutsatt i d)?

SLUTT