UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 115 — Viskøse væsker og elastiske stoffer.
Eksamensdag:	Tirsdag 8. juni 1999.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Et to-dimensjonalt forskyvningsfelt i x, y planet er gitt ved vektoren

$$\boldsymbol{u} = \{\alpha y, \alpha x\}$$

hvor konstanten $\alpha \ll 1$.

a) Skisser hvordan et kvadrat med hjørner $(1,0), (-1,0), (0,1)$ og $(0,-1)$ deformeres. Hvordan endres arealet for det deformerte kvadratet?

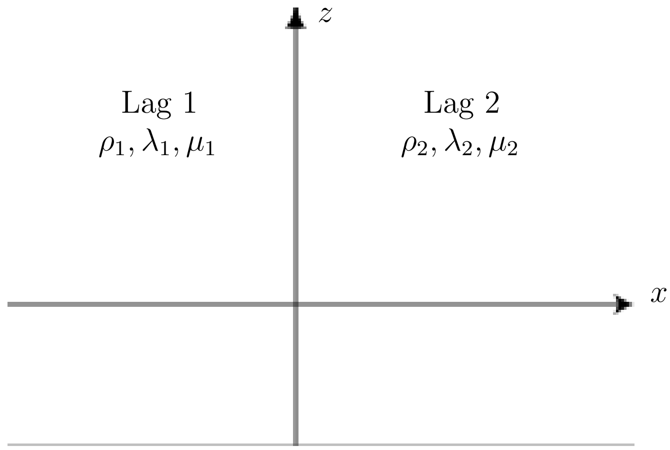
b) Finn forskyvningsforskjellen $\Delta\boldsymbol{u}$ mellom to vilkårlige punkter i feltet med vektoriell avstand $\{\Delta x, \Delta y\}$ og bestem tensoren for relative forskyvningsforskjeller.

c) Finn tensoren for deformasjoner uten volumendringer for det gitte feltet. (Generell utledning kreves ikke.)

Oppgave 2.

To homogene elastiske lag (lag 1 og lag 2) henholdsvis med tetthet ρ_1 og ρ_2 og Lamés elastisitetsparametre λ_1, μ_1 og λ_2, μ_2 grense inn mot hverandre

(Fortsettes side 2.)



langs en plan skilleflate (z-aksen) hvor lagene henger sammen. Det er ingen volumkrefter.
Vi skal regne med to-dimensjonale forskyvninger i x, z planet og setter forskyvningsvektoren

$$\boldsymbol{u} = \{0, u_z(x,t)\}$$

hvor $u_z(x,t)$ representerer z-komponenten av forskyvningsvektoren.

a) Vis at $u_z(x,t)$ oppfyller en bølgelikning av formen

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$$

og bestem konstanten c.

b) Vis at i lag 1 kan det forplante seg bølger med forskyvningsfelt

$$u_z(x,t) = I \sin(k_1 x - \omega t)$$

inn mot skilleflaten hvor I er amplituden, k_1 er bølgetallet og ω er vinkelhastigheten. Bestem k_1 når ω er gitt. Skisser forskyvningsfeltet. Hva kaller vi en slik bølge?

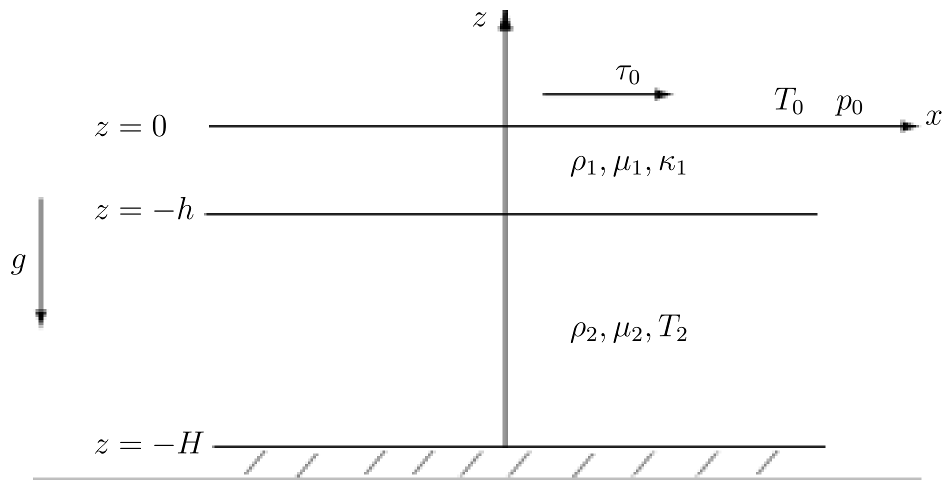
c) Sett opp tilsvarende uttrykk for den reflekterte og transmitterte bølge. La R og T henholdsvis betegne amplituden for disse to bølgene. Bestem bølgetallet for bølgene når vinkelhastigheten ω er gitt.

d) Formuler randbetingelsene ved skilleflaten og finn R og T uttrykt ved I. Bestem også refleksjonskoeffisienten.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3.

En inkompressibel væske er delt i to horisontale lag med forskjellig tetthet og viskositet. Overflatelaget har tykkelse h, tetthet ρ_1 og den dynamiske viskositetskoeffisienten er μ_1. Bunnlaget har tykkelse $H - h$, tetthet ρ_2 og dynamisk viskositetskoeffisient μ_2. Vi benytter et kartesisk koordinatsystem x, z med x-aksen horisontalt langs overflaten og z-aksen vertikalt slik som angitt på figuren.



En stasjonær rettlinjet strøm blir drevet av skjærspenningen τ_0 som virker i x-retning langs overflaten ($z = 0$). Strømhastigheten i overflatelaget betegnes $u_1(z)$ og i bunnlaget $u_2(z)$. Det forutsettes at overflaten og skilleflaten holder seg plane. Lufttrykket ved overflaten er p_0. Tyngdens akselerasjon er g.

a) Formuler grenseflatebetingelsene ved overflaten ($z = 0$), skilleflaten ($z = -h$) og bunnflaten ($z = -H$).

b) Bestem strømprofilene $u_1(z)$ og $u_2(z)$.

c) Skisser strømprofilene når $\mu_1 \gg \mu_2$.

d) Finn skjærspenningen og trykket i væsken ved bunnflaten.

Temperaturen ved overflaten er T_0 og i bunnlaget T_2 som begge antaes å holde seg konstante ($T_0 > T_2$).

e) Bestem temperaturen i overflatelaget $T_1(z)$ og varmestrømmen (fluksen) pr. flateenhet og tidsenhet fra overflaten mot bunnlaget. I overflatelaget er den spesifike varmekapasiteten c_1 og varmediffusiviteten κ_1.

SLUTT