UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 115 — Viskøse væsker og elastiske stoffer..
Eksamensdag:	Tirsdag 13. juni 2000.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

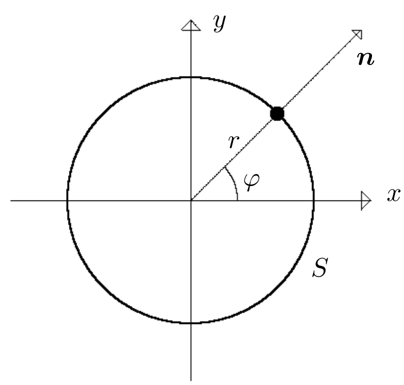
Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

I et to-dimensjonalt spenningsfelt i x, y-planet er spenningstensoren gitt ved

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{Bmatrix}$$

hvor skjærspenningskomponenten $\tau = \tau(x, y)$ er en funksjon av x og y koordinatene. Enhetsvektorene i koordinatsystemet er $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$ henholdsvis i x- og y-retning.



a) Finn spenningen $\boldsymbol{P}_n$ på en sirkelkontur S med sentrum i origo og radius r som funksjon av vinkelen φ. Normalvektoren til S er gitt ved $\boldsymbol{n} = \cos\varphi \boldsymbol{i} + \sin\varphi \boldsymbol{j}$.

(Fortsettes side 2.)

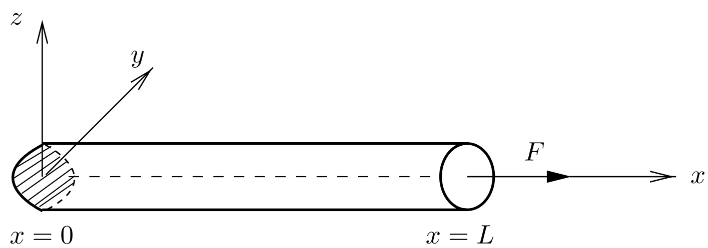
b) Finn størrelse og retning av normal- og tangensialspenningen på sirkelkonturen S.

c) Anta at $\tau = ax$ hvor a er en konstant og finn den totale spenningskraften på sirkelkonturen S.

d) Sett $\tau = \tau_0$ (konstant) og bruk resultatene fra b) til å finne hovedspenningene og hovedspenningsretningene for spenningstensoren $\mathcal{P}$.

Oppgave 2.

En homogen jevntykk sirkulær elastisk stang med tverrsnittsareal a, tetthet ρ og lengde L er fastspent i den ene enden ($x = 0$) og påvirkes av en kraft F i den andre enden ($x = L$). x-aksen ligger langs senterlinjen. Det er ingen krefter som virker på sideflaten av stangen. Lamés elastisitetskoeffisienter for stangen er λ og μ.



Vi tenker oss at kreftene som virker på endeflatene $x = 0$ og $x = L$ er jevnt fordelt over tverrsnittet og at vi kan se bort fra endeeffekter.

a) Hva er spenningen σ på endeflatene $x = 0$ og $x = L$ ved likevekt?

b) Sett opp spenningskomponentene i den tre-dimensjonale Hooke's lov og definer størrelsene som inngår (bevis kreves ikke).

c) Vis at forskyvningsfeltet i stangen er av formen

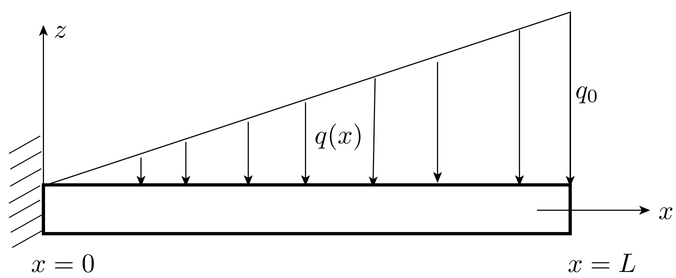
$$\boldsymbol{u} = \{\varepsilon x, \gamma y, \gamma z\}$$

hvor ε og γ er konstanter. Vis at $\gamma = -\nu\varepsilon$ og $\sigma = E\varepsilon$ hvor $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ og $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$. Hva kalles parametrene ν og E?

d) Stangen frigjøres fra kraften F, men er fortsatt fastspent i $x = 0$ (utkraget bjelke). Den utsettes så for en belastning $q = q_0 \frac{x}{L}$ (per lengdeenhet) langs øvre sidekant. Belastningen virker i x, z-planet og er rettet i negativ z-retning slik som figuren viser [se neste side].

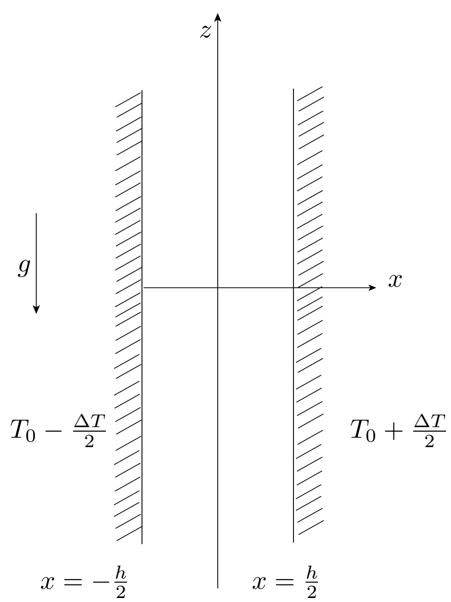
Beregn nedbøyningen av stangen $w(x)$ på grunn av belastningen. Vi ser bort fra tyngdens virkning. Parameteren EI = konstant for stangen.

(Fortsettes side 3.)



Oppgave 3.

Vi betrakter to-dimensjonal, stasjonær strøm i x, z-planet av en homogen inkompressibel Newtonsk væske mellom to parallelle vertikale plan. Avstanden mellom planene er h. z-aksen er orientert vertikalt midt mellom planene og x-aksen står normalt på planene.



I væsken er det en trykkgradient

$$\frac{dp}{dz} = -\beta$$

i z-retning hvor $\beta > 0$. Eneste ytre volumkraft er tyngden som virker i negativ z-retning. Tyngdens akselerasjon er g, tettheten i væsken er ρ og viskositetskoeffisienten er μ ($\nu = \frac{\mu}{\rho}$).

a) Begrunn hvorfor hastighetsvektoren

$$\boldsymbol{v} = \{0, w(x)\}$$

hvor vertikalkomponenten w bare er en funksjon av x. Hva er naturlige grenseflatebetingelser for $w(x)$ ved planene $x = \pm\frac{h}{2}$?

b) Bestem strømprofilen $w(x)$.

c) Finn skjærspenningen (størrelse og retning) på planene $x = \pm\frac{h}{2}$.

d) Bestem energidissipasjon (Δ) per volumenhet i væsken.

e) Finn temperaturfeltet i væsken, $T(x)$, når temperaturen på de to planene $x = \pm\frac{h}{2}$ holdes konstant på henholdsvis $T_0 \pm \frac{\Delta T}{2}$.

f) Beregn varmestrømmen (i x-retning) gjennom planene. Varmeledningstallet (termisk konduktivitet) i væsken er k.

SLUTT