UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 115 — Viskøse væsker og elastiske stoffer.
Eksamensdag:	Fredag 8. juni 2001.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

I et kartesisk koordinatsystem x, y, z er spenningstensoren gitt ved

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} 0 & \tau_1 & 0 \\ \tau_1 & 0 & \tau_2 \\ 0 & \tau_2 & 0 \end{Bmatrix}$$

hvor τ_1 og τ_2 er konstanter. Enhetsvektorene langs de tre akseretningene er henholdsvis $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{k}$

a) Finn spenningen på en flate med normalvektor $\boldsymbol{n} = \cos\varphi \boldsymbol{i} + \sin\varphi \boldsymbol{j}$ hvor φ er en vilkårlig vinkel.

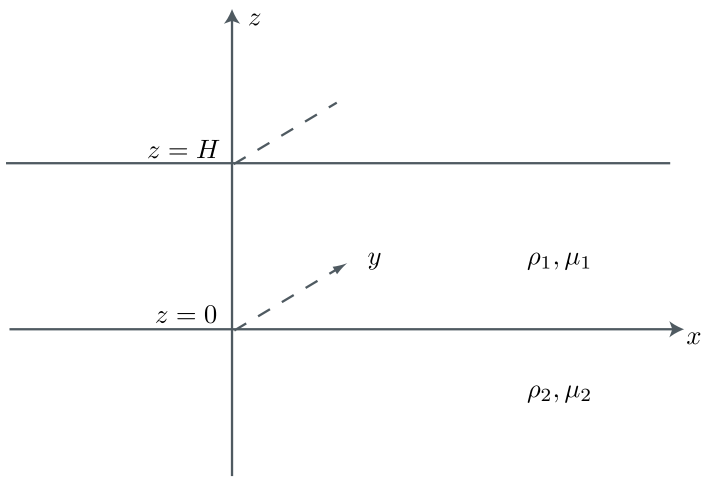
b) Finn normalspenningen og størrelse og retning av skjærspenningen (tangensialspenningen) på flaten gitt i a). For hvilke verdier av φ har skjærspenningen sin maksimale verdi?

c) Finn hovedspenningene og hovedspenningsretningene for tensoren $\mathcal{P}$.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

Vi skal undersøke bølgeforplantning i et elastisk stoff som består av to homogene lag som vist på figuren. Vi beskriver bevegelsene i et kartesisk koordinatsystem (x, y, z) hvor x og y-aksen ligger i skilleflaten mellom lagene $(z = 0)$ og z-aksen er normalt på skilleflaten og overflaten av øvre lag. Lagene er ubegrenset i x og y-retningene.



Øvre lag har tykkelse H, tetthet ρ_1 og skjærelastisitetsmodulen (den andre Lameé-konstanten) er μ_1. Nedre lag er ubegrenset i negativ z-retning og har tetthet ρ_2 og skjærelastisitetsmodul μ_2. Overflaten for øvre lag, $z = H$, er fri til å bevege seg og lagene henger sammen ved skilleflaten $(z = 0)$.

Vi antar at vi kan se bort fra virkningen av tyngden og lufttrykket ved $z = H$ og det er ingen andre ytre krefter som virker på lagene. Vi antar at forskyvningene i lagene er rettet i y-retning og bare funksjoner av x, z og t. Forskyvningsvektorene $\boldsymbol{u}_1$ og $\boldsymbol{u}_2$ henholdsvis i øvre og nedre lag har komponentene

$$\boldsymbol{u}_1 = \{0, v_1(x, z, t), 0\}$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \{0, v_2(x, z, t), 0\}$$

a) Vis at forskyvningskomponentene oppfyller likningen

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = c_i^2 \Big(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} \Big) \qquad (i = 1, 2)$$

og bestem konstanten c_i i de to tilfellene. Hva kaller vi denne likningen?

Vi setter nå:

$$v_1(x, z, t) = \hat{v}_1(z) \sin(kx - \omega t)$$
$$v_2(x, z, t) = \hat{v}_2(z) \sin(kx - \omega t)$$

hvor k og ω er konstanter og innfører bølgehastigheten $c = \frac{\omega}{k}$.

(Fortsettes side 3.)

b) Vis at vi får følgende likninger for å bestemme funksjonene $\hat{v}_1(z)$ og $\hat{v}_2(z)$:

$$\frac{d^2\hat{v}_1}{dz^2} = -k_1^2\hat{v}_1 \ , \qquad k_1^2 = k^2\Big(\frac{c^2}{c_1^2} - 1\Big)$$
$$\frac{d^2\hat{v}_2}{dz^2} = k_2^2\hat{v}_2 \ , \qquad k_2^2 = k^2\Big(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\Big)$$

Hvilke krav må vi legge på c, c_1 og c_2?

c) Sett opp grenseflatebetingelsene ved overflaten $z = H$, ved skilleflaten $z = 0$ og i dypet $z \to -\infty$ når vi antar at bevegelsen dør ut i dypet.

d) Løs likningene i b) og bruk grenseflatebetingelsene til å vise at vi kan utlede en likning

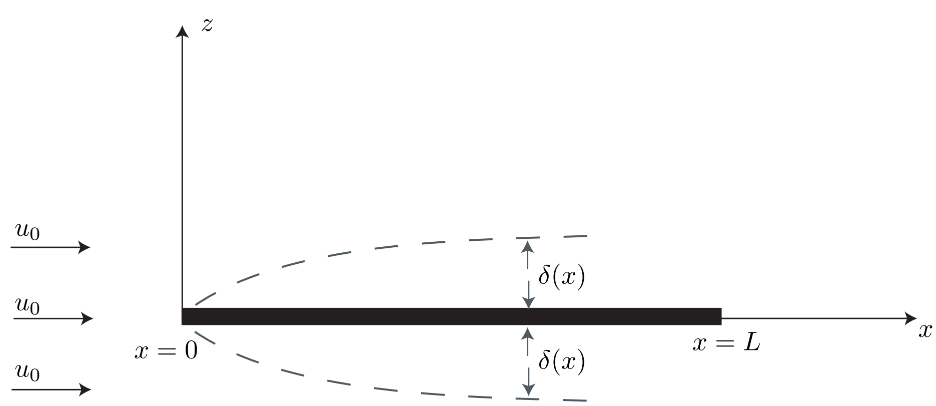
$$\tan k_1 H = \frac{\mu_2 k_2}{\mu_1 k_1}$$

som bestemmer bølgefarten c når bølgetallet k er gitt. Hva blir bølgehastigheten når $kH \to 0$?

Den bølgeformen som vi har funnet her kalles Love-bølger og disse bølgene kan forårsake store skader på bygninger ved jordskjelv.

Oppgave 3.

En inkompressibel Newtonsk væske strømmer forbi en tynn flat plate av lengde L. Foran platen er strømmen uniform, stasjonær og rettet langs platen. Hastigheten er u_0. Det forutsettes at platen har stor utstrekning på tvers av strømmen slik at strømmen ved platen kan betraktes som todimensjonal og stasjonær. Vi legger et kartesisk koordinatsystem (x, z) med origo i forkant av platen og x-aksen langs platen.



(Fortsettes side 4.)

Den kinematiske viskositetskoeffisienten i væska er ν og tettheten er ρ. For $|z| < \delta(x)$ hvor $\delta(x)$ er tykkelsen av grensesjikt ved platen gjelder følgende likningen med god tilnærmelse:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1}$$

hvor u, w er henholdsvis strømkomponentene i x- og z-retning

a) Forklar hvordan man kommer fram til likningen ovenfor og gjør rede for de antagelsene som er gjort under utledningen.

b) Finn et tilnærmet uttrykk for strømprofilen $u(z)$ som er gyldig nær platen for $|z| \ll \delta$.

Det kan vises at grensesjiktstykkelsen er

$$\delta(x) = 5\sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} \tag{2}$$

og at strømkomponenten u innenfor grensesjiktet over platen er tilnærmet gitt ved

$$u = u_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{z}{\delta}\right) \qquad\qquad 0 \le z \le \delta \tag{3}$$

og med tilsvarende uttrykk for grensesjiktet under platen. Utledning av (2) og (3) kreves ikke.

c) Bruk likningene (2) og (3) til å finne skjærspenningen ved platen ($z = 0$).

d) Finn den totale kraften som virker på platen (per lengdeenhet normalt x, z-planet).

e) Finn hastighetskomponenten w i z-retning i grensesjiktet.

SLUTT