UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 115 — Viskøse væsker og elastiske stoffer.
Eksamensdag:	Torsdag 5. juni 2003.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

I en plan spenningstilstand er spenningstensoren gitt på formen

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{Bmatrix}$$

a) Utled Cauchys 2. relasjon for en plan spenningstilstand.

b) La $\boldsymbol{n} = \{n_1, n_2\}$ der $n_1^2 + n_2^2 = 1$. Finn maksimal normal- og skjærspenning i mediet.

c) Finn Mohrs spenningsdiagram (sirkel) når $P_{12} = P_{21} = P_{22} = 0$.

Det viser seg at for mange stoffer er deformasjonene avhengig av tidsforløpet av belastningen. Studiet av slike sammenhenger kalles rheologi. For noen slike stoffer kan en firmoviskøs modell (Kelvin-Voigt modell) være brukbar. I denne modellen kan den konstitutive ligningen (for en-akset strekk) skrives:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$$

der E og η er konstanter og $\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$. Vi tenker oss at ved tiden $t = 0$ er $\varepsilon = 0$, og at vi plutselig pålegger en konstant spenning σ_0.

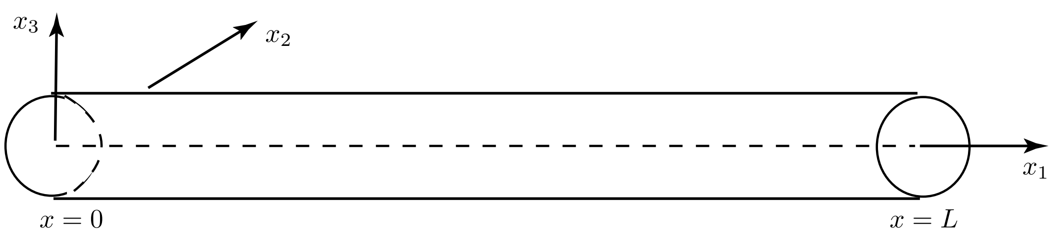
d) Finn $\varepsilon(t)$ for $t \geq 0$. Diskutér de tre tilfellene $t \to \infty$, $\eta \to 0$, $E \to 0$.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

Torsjon (vridning) av en lang sylinder (ikke nødvendigvis sirkulær) er en klassiker i faste stoffers mekanikk og representerer et første skritt mot mer omfattende analyse av mer kompliserte geometrier (f.eks. torsjonsstivhet av skip, biler fly etc.).

Denne oppgaven handler om torsjon av en jevntykk, sirkulær, homogen, elastisk sylinder med radius R og lengde L. Den har tetthet ρ og Lamés elastisitetsparametre λ og μ,



Sylinderen er fastspent i en vegg ved $x = 0$. I den andre enden pålegges et mmoment $M\boldsymbol{i}_1$, der $\boldsymbol{i}_1$ er enhetsvektoren rettet langs x_1-aksen som ligger langs sylinderens senterlinje. Forskyvningsfeltet er gitt på formen

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -qx_1x_3, \quad u_3 = qx_1x_2$$

der q er en konstant.

a) Finn tøyningstensoren og spenningstensoren.

b) Finn maksimal normalspenning og maksimal skjærspenning.

c) Finn spenningen på sylinderens sideflater.

d) Finn spenningen på endeflaten $x = L$.

Oppgave 3.

I bio-fluidmekanikk studerer man en rekke fenomener, f.eks. hvordan fisk svømmer, hvordan fugler flyr, diffusjon i cellevev, åreforkalkning, koagulasjon (blodpropp) og strømning i blodårer. Hagen-Piseuille-strømning er en brukbar modell for hvordan blodet strømmer i en blodåre. Vi skal anta en stasjonær strømning i en del av en lang, rett og jevntykk blodåre som betraktes å ha sirkulært tverrsnitt. Blodet (blodplasmaet) antas å følge lovene for en homogen, inkompressibel Newtonsk væske og har følgende spesifikasjoner:

(Fortsettes side 3.)

tetthet ρ, dynamisk viskositetskoeffisient μ og kinematisk viskositetskoeffisient ν. Blodåren er horisontal og tyngden spiller ingen rolle. En trykkgradient $\frac{\partial p}{\partial x} = -\beta$ virker langs x-retningen, der x-aksen ligger langs årens (rørets) symmetriakse. Blodårens radius er a, og vi antar at strømningen er symmetrisk om x-aksen.

a) Bestem hastighetsprofilet og finn volumstrømmen (pr. tidsenhet) gjennom åren.

b) Finn skjærspenningen ved åreveggen.

c) Finn trykk-kraftens arbeid pr. tidsenhet og lengdeenhet av åren.

d) Finn dissipasjonen pr. tidsenhet og lengdeenhet av åren.

SLUTT