

UNIVERSITETET I OSLO

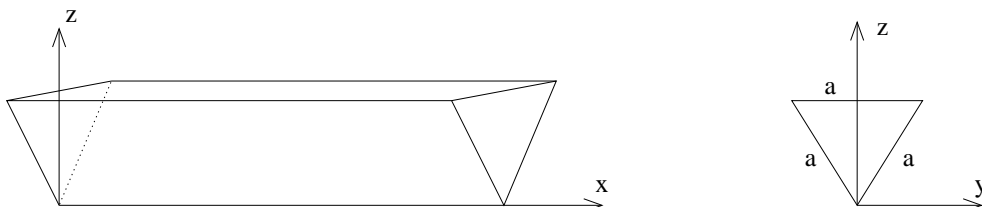
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 2200/4200 — Viskøse væsker og elastiske stoffer.
Eksamensdag:	Fredag 1. desember 2005.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematiske Formelsamling, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Et rør er orientert langs x -aksen og har tverrsnitt som en likesidet trekant med sider a i yz -planet.



I røret er det ei inkompressibel Newtonsk væske med tetthet ρ og viskositet μ . Vi pålegger en konstant trykkgradient i x -retning, $\gamma = \partial p / \partial x < 0$. For øvrig ser vi bort fra ytre krefter. Vi skal betrakte en rørstrøm på formen

$$\mathbf{u} = (u(y, z), 0, 0)$$

hvor

$$u(y, z) = \alpha(z - \beta)(3y^2 - z^2)$$

hvor α og β ikke avhenger av koordinatene x , y eller z .

(Fortsettes side 2.)

- a) Bestem α og β .
- b) Regn ut spenningstensoren for strømfeltet.
- c) Bestem spenningsfordelingen på øvre sideflate $z = \sqrt{3}a/2$, og bestem den totale krafta per lengdeenhet på øvre sideflate.

Oppgave 2.

Vi betrakter et lag med elastisk stoff med upåvirket tykkelse h mellom de plane flatene $z = 0$ og $z = h$. Vi legger x - og y -aksene langs flaten $z = 0$, med z -aksen vertikalt oppover. Flaten $z = 0$ er fastholdt. På flaten $z = h$ pålegger vi et uniformt og stasjonært trykk p_0 ovenfra. Laget påvirkes av tyngdens akselerasjon g som virker i negativ z -retning. Anta at det elastiske stoffet er isotropt med Lamés elastisitetsparametre λ og μ . Anta forskyvningsfeltet $\mathbf{u} = (0, 0, u_z(z))$.

- a) Bestem spenningstensoren fullstendig.
- b) Bestem forskyvningsfeltet fullstendig. Hvor stor er nedsynkningen til overflaten?

Oppgave 3.

I varme strøk (f.eks. Sør-Spania) kan det være lurt å bygge hus slik at man utnytter varmens evne til å forplante seg gjennom veggen som en bølge. I denne oppgaven sier vi at en optimal vegg lar de varme dagstemperaturene forplante seg inn som oppvarming om natta, og de kjølige nattetemperaturene forplante seg inn som avkjøling om dagen uten ytterligere bekymringer for veggens isolerende evne. La x -aksen gå på tvers av veggen slik at $x = 0$ er utsiden og $x = L$ er innsiden av veggen. Veggen består av et stoff med termisk konduktivitet k , varmediffusivitet κ , tetthet ρ og spesifikk varmekapasitet c . Vi ser bort fra variasjon i y - og z -retning.

- a) Med konstant utetemperatur T_u og konstant innetemperatur T_i , bestem den stasjonære fordelingen av temperatur gjennom veggen og bestem varmegjennomstrømmingen per flate- og tidsenhet.
- b) La utetemperaturen variere som

$$T_u = T_0 + T_1 \cos(\omega t) \quad \text{med} \quad \omega = \frac{2\pi}{1 \text{ døgn}}.$$

(Fortsettes side 3.)

Anta at temperaturen forplanter seg som en dempet bølge inn gjennom veggen

$$T = e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x)$$

hvor α og β er reelle konstanter. Bestem α og β uttrykt ved ω og κ . Forklar hvorfor betingelsen for en optimal vegg er $\cos(\beta L) = -1$. Hva er tykkelsen L til en optimal vegg? Hvor fort beveger varmebølgen seg?

- c) La til slutt utetemperaturen være gitt som i punkt b), la innetemperaturen være konstant $T_i = T_0$, og la veggtykkelsen L være optimal. For å tilfredsstillere randkravene må vi ta hensyn til at varmebølgen kan reflekteres fram og tilbake mellom utsiden og innsiden av veggen. Vi antar derfor at

$$T = T_0 + Ie^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) + Re^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x)$$

hvor vi lar både $\alpha > 0$ og $\beta > 0$. Bestem koeffisientene I og R .

Veggens isolerende evne vil nå være gitt ved varmegjennomstrømningen på innsiden av veggen. Vis at varmegjennomstrømningen på innsiden av veggen per flate- og tidsenhet er gitt ved

$$q = -\frac{\sqrt{2} k \alpha T_1 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})}{\sinh(\alpha L)}$$

Finn maksimal varmegjennomstrømning per flate- og tidsenhet i løpet av et døgn.

Som en kuriositet nevner vi noen optimale tykkelser (og tilhørende verdier for maks $|q|/T_1$ med enhet $J/(Ksm^2)$) for noen byggematerialer: Betong 6.8 cm (0.7), teglstein 17 cm (1.4), marmor 58 cm (1.9), aluminium 4.7 m (16), sølv 6.8 m (24).

SLUTT