

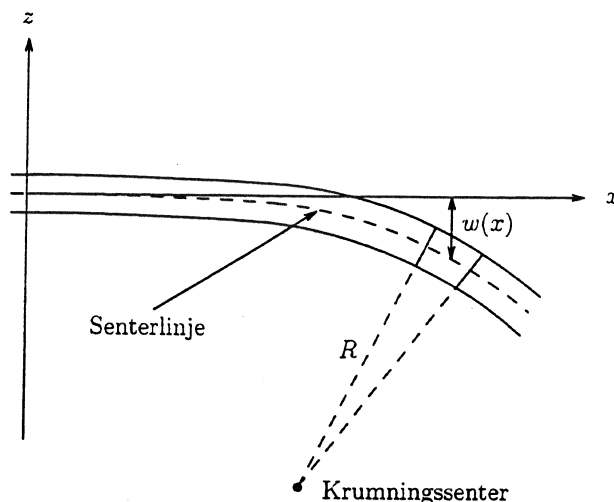
# UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK 2200/4200 — Viskøse væsker og elastiske stoffer.  
Eksamensdag: Mandag 4. desember 2006.  
Tid for eksamen: 14.30 – 17.30.  
Oppgavesettet er på 3 sider.  
Vedlegg: Ingen.  
Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematiske Formelsamling, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

## Oppgave 1.



Figur 1: Bøyning av stav.

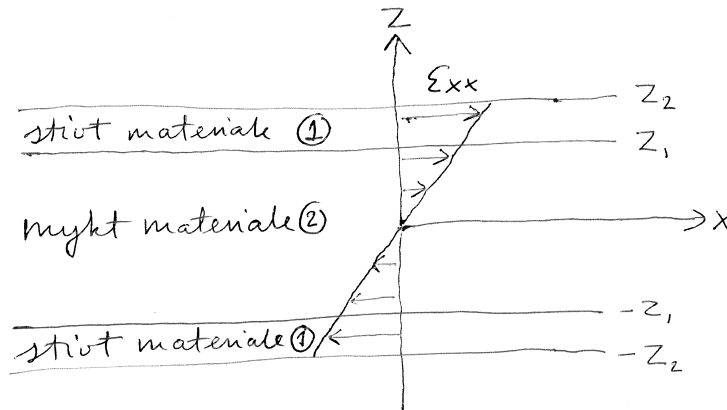
Kunnskap om bøyning av bjelker og staver har stor betydning for ingeniører som dimensjonerer konstruksjoner. Figuren viser en stav/bjelke der midtlinjen ligger langs  $x$ -aksen når det ikke er noen belastning. Vertikalen er langs

(Fortsettes side 2.)

$z$ -retning. Det er ingen tyngde. Bjelken bøyes i  $xz$ -planet hvor forskyvningen av senterlinjen i bjelken,  $w(x)$ , er regnet fra  $x$ -aksen. For hvert segment av staven/bjelken kan vi definere en krumningsradius  $R$  bestemt ved  $\frac{1}{R} = -\frac{d^2w}{dx^2}$  (skal ikke vises). Man kan vise at tøyningen i  $x$ -retning er

$$\epsilon_{xx} = \frac{z}{R} \quad (1)$$

- La  $E$  være Youngs elastisitetsmodul. Finn spenningen  $P_{xx}$ .
- Spenningskraften setter opp et moment med hensyn på senterflatens skjæringslinje med tverrsnittsflaten som er parallell med  $y$ -aksen (som peker inn i papirplanet). Finn dette momentet.
- Gi en utledning av (1).



Figur 2: Fordeling av tøyning  $\epsilon_{xx}$  ved bøyning av en laminert plate.

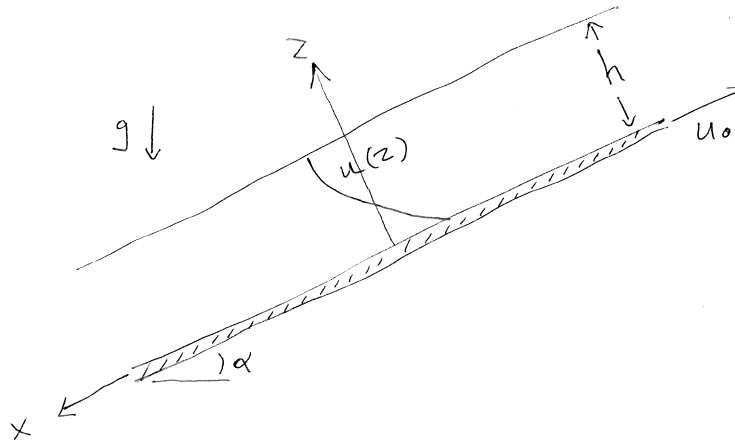
Laminater – komposittmaterialer – er satt sammen av stive og myke materialer som vist på figuren. Komposittmaterialer brukes blant annet i båter/skip, fly, ski, og mye annet. Vi antar at Hookes lov gjelder for stivt materiale **1**, med Youngs modul  $E_1$ , og for mykt materiale **2**, med Youngs modul  $E_2$ , som vist i figuren, med  $E_1 > E_2$ . Laminatet bøyes. Vi antar at tøyningen i  $x$ -retning er gitt ved (skal ikke vises)

$$\epsilon_{xx} = \frac{z}{R}$$

- Finn spenningsfeltet  $P_{xx}$ . Skisser spenningsfeltet. ( $P_{xx}$  kan være diskontinuerlig ved  $\pm z_1$ .)
- Finn maksimal skjærspenning i laminatet. (To-dimensjonal analyse.)

(Fortsettes side 3.)

## Oppgave 2.



En væskefilm med tykkelse  $h$  renner nedover et skråplan. Dette danner vinkelen  $\alpha$  med horisontalen. Bevegelsen foregår i tyngdefeltet. Skråplanet har hastighet  $u_0$  i skråplanetets retning, som antydnet på figuren. Strømningen er inkompressibel, stasjonær, væsken er Newtonsk, tettheten er  $\rho$ , dynamisk viskositetskoeffisient er  $\mu$ . Det er like forhold i  $x$ -retningen. Det er ingen skjærspenning eller normalspenning ved  $z = h$ . Tyngdeakselerasjonen er  $g$ .

- Bestem hastighetsprofilen og  $u_0$  når vi krever at volumstrømmen er lik null.
- Bestem dissipasjonen i hvert snitt  $x = \text{konstant}$ .
- Finn skjærspenningens arbeid pr. tidsenhet ved veggen.
- Finn trykket som funksjon av  $z$ .
- I sirkulær Couettestrøm strømmer Newtonsk væske mellom to konsentriske, roterende sylindre. Bestem hastighetsprofilen. Bestem den lokale dissipasjonen. Innfør de notasjoner og symboler som er nødvendig. Hint: Anta et hastighetsfelt på formen  $\mathbf{v} = v(r)\mathbf{i}_\theta$ , der  $r$  er radiell avstand og  $\mathbf{i}_\theta$  er rettet langs sylinderkonturen. Da er:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) v(r) \mathbf{i}_\theta.$$

SLUTT