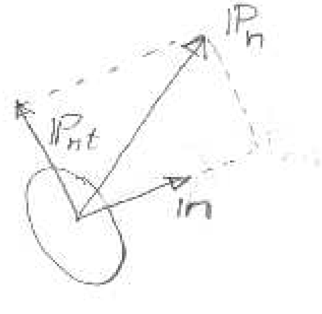
LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MEK2200 HØST 2007

av Bjørn Gjevik

Oppgave 1



a) Spenningen på flata med normalvektor $\mathbb{n}$ gitt ved Cauchys 1. sats

$$\mathbb{P}_n = \mathcal{P}\cdot\mathbb{n} = \begin{Bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \tau \\ 0 & \tau & p_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\{0, \tau, p_2\}}}$$

b) Normalspenningen: $P_{nn} = \mathbb{P}_n \cdot \mathbb{n} = 0\cdot 0 + \tau\cdot 0 + p_2\cdot 1$

$$= \underline{\underline{p_2}}$$

Tangensialspenningen: $\mathbb{P}_{nt} = \mathbb{P}_n - P_{nn}\,\mathbb{n}$

$$= \{0, \tau, p_2\} - \{0, 0, p_2\}$$

$$= \underline{\underline{\{0, \tau, 0\}}}$$

Tangensialspenningen har størrelse τ og er rettet i y-retning

c) Hovedspenningene er gitt ved $\det(\mathcal{P} - \sigma\mathcal{I}) = 0$ det vil si

$$\det \begin{vmatrix} p_1-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & p_2-\sigma & \tau \\ 0 & \tau & p_2-\tau \end{vmatrix} = 0$$

Regner ut determinaten:

$$(p_1-\sigma)[(p_2-\sigma)^2-\tau^2]=0$$

Hovedspenninger for 1) $p_1-\sigma=0$

2) $(p_2-\sigma)^2-\tau^2=0$

Det gir tre hovedspenninger:

$$\underline{\underline{\sigma_1=p_1\ ,\quad \sigma_2=p_2+\tau\ ,\quad \sigma_3=p_2-\tau}}$$

d) Hookes lov gir:

$$P_{ij}=\lambda\,\nabla\cdot\mathbf{u}\,\delta_{ij}+2\mu\,\varepsilon_{ij}$$

For $i\neq j$ er $P_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}$. Dvs $\varepsilon_{ij}=\frac{P_{ij}}{2\mu}$

Altså
$$\varepsilon_{xy}=\frac{P_{xy}}{2\mu}=\underline{\underline{0}}$$

$$\varepsilon_{xz}=\frac{P_{xz}}{2\mu}=\underline{\underline{0}}$$

$$\varepsilon_{yz}=\frac{P_{yz}}{2\mu}=\underline{\underline{\frac{\tau}{2\mu}}}$$

Oppgave 2

a) Hookes lov for en-dimensjonal spenning i stang $\sigma(x,t)=E\frac{\partial u}{\partial x}$

Bevegelseslikningen for en-dimensjonale forskyvninger ($F=ma$)

$$a=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma}{\partial x}$$

hvor $a=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ er aksellerasjonen. Innsatt for σ og a gir dette:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Q.e.d Hvilket skulle bevises

b) Antar $u = \hat{u}(x)\sin\omega t$

Derav $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2\hat{u}(x)\sin\omega t$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2\hat{u}}{dx^2}\sin\omega t$

Innsatt i bølgelikningen fra a)

$$-\omega^2\hat{u}\,\cancel{\sin}\omega t = \frac{E}{\rho}\frac{d^2\hat{u}}{dx^2}\,\cancel{\sin}\omega t$$

Derav

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} = -k^2\hat{u} \quad , \quad k^2 = \frac{\rho\omega^2}{E}$$

Løsning av denne likningen

$$\hat{u} = A\sin kx + B\cos kx$$

Krav om spenningsfrie ender i stanga

$$\sigma\left(x = \pm\frac{L}{2}\right) = E\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\pm\frac{L}{2}} = 0$$

Det vil si at vi må kreve:

$$\frac{d\hat{u}}{dx} = 0 \qquad \text{for } x = \pm\frac{L}{2}$$

Det betyr at:

$$Ak\cos\left(\frac{kL}{2}\right) - Bk\sin\left(\frac{kL}{2}\right) = 0$$

og

$$Ak\cos\left(\frac{kL}{2}\right) + Bk\sin\left(\frac{kL}{2}\right) = 0$$

Dette er oppfylt når:

1) $A \neq 0$, $B = 0$ og $\cos\frac{kL}{2} = 0$

Dvs $\frac{kL}{2} = (2n-1)\frac{\pi}{2}$ $\underline{\underline{k = \frac{(2n-1)\pi}{L}}}$ $n = 1, 2, 3 \dots$

2) $A = 0$, $B \neq 0$ og $\sin\frac{kL}{2} = 0$

Dvs. $\frac{kL}{2} = n\pi$ $k = \frac{2n\pi}{L}$ $n = 1, 2, 3 \dots$

Perioden for svingningene i stanga er:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,k} = \frac{2\pi}{ck}, \text{ hvor } \underline{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

I tilfellet 1) $T = \frac{2\pi L}{c(2n-1)\pi} = \underline{\underline{\frac{2L}{(2n-1)c}}}$

I tilfellet 2) $T = \frac{2\pi L}{c\,2n\pi} = \underline{\underline{\frac{L}{nc}}}$

Oppgv. 2 fortsatt

c) For symmetriske forskyvninger

$$u(x,t) = B\cos kx \sin\omega t$$

$k = \frac{2n\pi}{L}$ fra punkt b)

Kan skrive:

$$u(x,t) = B\cos kx \sin\omega t = \frac{B}{2}\sin(kx+\omega t) - \frac{B}{2}\sin(kx-\omega t)$$

Første ledd $\frac{B}{2}\sin(kx+\omega t)$ representerer en bølge som går i negativ x-retning med hastighet $c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Andre ledd $\frac{B}{2}\sin(kx-\omega t)$ representerer en bølge som går i positiv x-retning med hastighet $c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Oppgave 3

a) Strømvektor $\mathbb{V} = \{u, 0\}$ (rettlinjet strøm i x-retning). Inkompressibel væske altså:

$$\nabla \cdot \mathbb{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Det viser at $u = u(z)$

Navier-Stokes likning i x-retning gir

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}}}_{=0} = -\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{=\frac{\beta}{\rho}} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

p.g.a stasjonære forhold.

Derav:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = -\frac{\beta}{\rho\nu} = -\frac{\beta}{\mu} \quad , \quad \mu = \rho\nu$$

Integrerer to ganger

$$u(z) = -\frac{\beta}{2\mu}z^2 + Az + B$$

Integrasjonskonstantene A og B bestemmes ved grenseflatebetingelsene

$$u\left(z = \pm\frac{H}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{\beta}{2\mu}\left(\frac{H}{2}\right)^2 + A\frac{H}{2} + B = 0$$

$$-\frac{\beta}{2\mu}\left(\frac{H}{2}\right)^2 - A\frac{H}{2} + B = 0$$

Derav: $B = \frac{\beta}{2\mu}\left(\frac{H}{2}\right)^2 \quad , \quad A = 0$

Strømprofilen blir:

$$\underline{\underline{u(z) = \frac{\beta}{2\mu}\left[\left(\frac{H}{2}\right)^2 - z^2\right]}}$$

Oppgave 3 fortsatt

b) Planet $z = +\frac{H}{2}$ har normalvektor $\mathbb{n} = -\mathbb{k}$

Spenningen på planet:

$$\mathbb{P}_2 = \mathcal{P} \cdot \mathbb{n} = \begin{Bmatrix} P_{xx} & P_{xz} \\ P_{zx} & P_{zz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \{-P_{xz},\ P_{zz}\}$$

Skjærspenningen på planet er

$$\mathbb{P}_{2t} = -P_{xz}\,\mathbb{i} \qquad (P_{zz}\mathbb{k} \text{ er normalspenning})$$

Fra Newtons friksjonslov

$$P_{xz} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{xz} = 2\mu\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial 0}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial u}{\partial z}$$

Nå er $\frac{du}{dz} = -\frac{\beta}{\mu} z$. Skjærspenningen ved planet $z = +\frac{H}{2}$ blir derfor

$$\mathbb{P}_{2t} = -P_{xz}\left(z = \frac{H}{2}\right)\mathbb{i} = -\mu\frac{du}{dz}\Big|_{z=\frac{H}{2}}\mathbb{i} = \mu\frac{\beta}{\mu}\cdot\frac{H}{2}\,\mathbb{i}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\beta H}{2}\,\mathbb{i}}}$$

Planet $z = -\frac{H}{2}$ har normalvektor $\mathbb{n} = \mathbb{k}$ slik at skjærspenningen på planet er

$$\mathbb{P}_{2t} = +P_{xz}\left(z = -\frac{H}{2}\right)\mathbb{i} = \mu\frac{du}{dz}\Big|_{z=-\frac{H}{2}}\mathbb{i} = \underline{\underline{\frac{\beta H}{2}\,\mathbb{i}}}$$

Oppgave 3 fortsatt

c) Energidissipasjonen per volumenhet og tidsenhet er:

$$\Delta = 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}^2 = 2\mu(\underbrace{\dot{\varepsilon}_{xx}^2}_{=0} + 2\dot{\varepsilon}_{xz}^2 + \underbrace{\dot{\varepsilon}_{zz}^2}_{=0}) = 4\mu \dot{\varepsilon}_{xz}^2 = 4\mu \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{\beta^2 z^2}{\mu}$$

Varmetransportlikningen

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{v_j \frac{\partial T}{\partial x_j}}_{=0} = \underbrace{\varkappa \nabla^2 T}_{=\varkappa \frac{d^2T}{dz^2}} + \frac{\Delta}{\rho c}$$

Det gir:

Innfører Varmeledningstallet $k = \varkappa\rho c$

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{\Delta}{\varkappa\rho c} = \frac{\Delta}{k} = -\frac{\beta^2}{k\mu} z^2$$

Integrerer denne likningen og får

$$T(z) = -\frac{\beta^2}{12k\mu} z^4 + Az + B$$

Bestemmer integrasjonskonstantene ved å bruke randbetingelsene

$$T(z = \pm \frac{H}{2}) = T_0$$

Det gir:

$$T = T_0 + \frac{\beta^2}{12k\mu}\left[\left(\frac{H}{2}\right)^4 - z^4\right]$$