UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 3220/4220 — Viskøse væsker og elastiske stoffer.
Eksamensdag:	Tirsdag 2. desember 2008.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er tilsammen 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1.

I et kartesisk koordinatsystem x, y, z er spenningstensoren gitt ved

$$\mathcal{P} = \begin{Bmatrix} 0 & \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

hvor τ_1 og τ_2 er konstanter.

a) Finn spenning på en flate med normalvektor $\boldsymbol{n} = \{1, 0, 1\}/\sqrt{2}$.

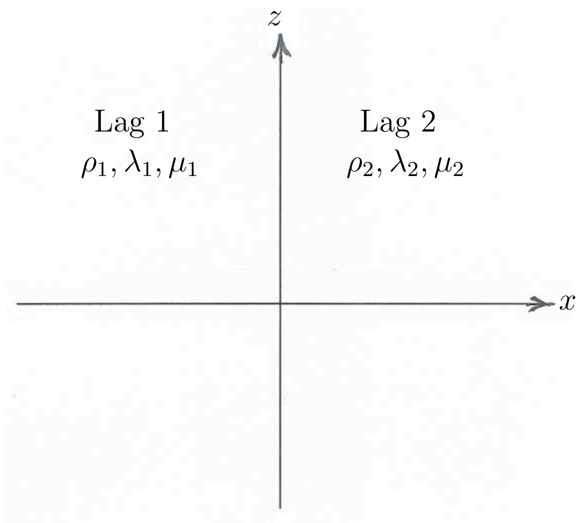
b) Finn normalspenningen og tangensialspenningen (størrelse og retning) på den samme flaten.

c) Vi antar et isotropt elastisk medium som følger Hookes lov. Bestem komponentene i tøyningstensoren $\{\epsilon_{ij}\}$ som tilsvarer den gitte spenningstensoren.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

To homogene elastiske lag (lag 1 og lag 2) henholdsvis med tetthet ρ_1 og ρ_2 og Lamés elastisitetsparametre λ_1, μ_1 og λ_2, μ_2 grense inn mot hverandre langs en plan skilleflate (z-aksen) hvor lagene henger sammen. Det er ingen volumkrefter.



Vi skal regne med to-dimensjonale forskyvninger i x, z planet og setter forskyvningsvektoren

$$\boldsymbol{u} = \{0, u_z(x,t)\}$$

hvor $u_z(x,t)$ er z-komponenten av forskyvningsvektoren.

a) Vis at $u_z(x,t)$ oppfyller en bølgelikning av formen

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$$

og bestem konstanten c.

b) Vis at i lag 1 kan det forplante seg bølger med forskyvningsfelt

$$u_z(x,t) = I \sin(k_1 x - \omega t)$$

inn mot skilleflaten, hvor I er amplituden, k_1 er bølgetallet og ω er vinkelhastigheten. Bestem k_1 når ω er gitt. Skisser forskyvningsfeltet. Hva kaller vi en slik bølge?

c) Sett opp tilsvarende uttrykk for den reflekterte og transmitterte bølge. La R og T henholdsvis betegne amplituden for disse to bølgene. Bestem bølgetallet for bølgene når vinkelhastigheten ω er gitt.

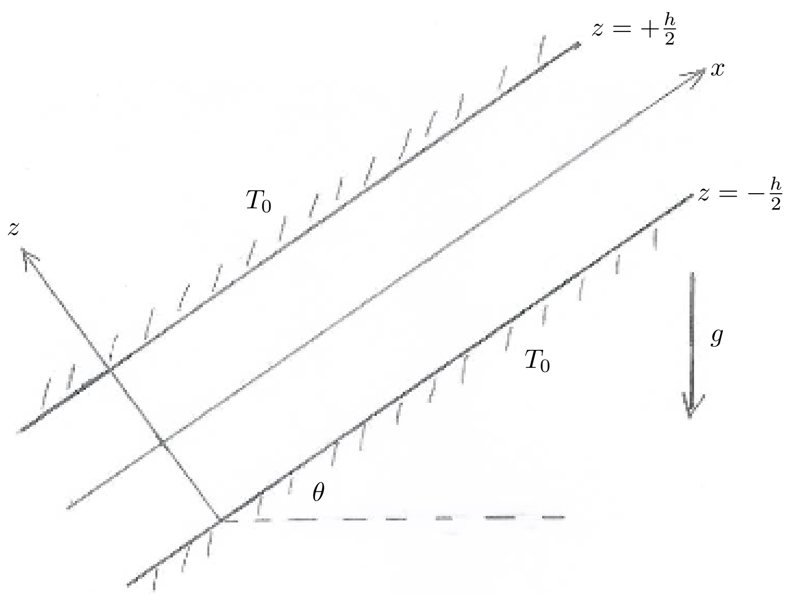
d) Formuler randbetingelsene ved skilleflaten og finn R og T uttrykt ved I. Bestem også refleksjonskoeffisienten.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3.

Vi betrakter to-dimensjonal rettlinjet og stasjonær strøm av en homogen inkompressibel viskøs væske mellom to parallelle plan i avstand h fra hverandre. Helningsvinkelen i forhold til horisontalen er θ. Strømmen beskrives i et aksekors x, z som er orientert slik som figuren viser. Strømmen er drevet av tyngdens akselerasjon g og en konstant trykkgradient i x-retning $\frac{\partial p}{\partial x} = -\beta$ hvor p er trykket i væsken.

Væskens tetthet er ρ og viskositetskoeffisienten er $\mu = \rho\nu$. Varmediffusiviteten i væsken er κ og den spesifike varmekapasiteten er c. Vi antar at hastighetsfeltet er gitt ved $\boldsymbol{v} = u(z)\boldsymbol{i}$, hvor $\boldsymbol{i}$ er enhetsvektoren i x-retning.



a) Bestem hastighetsprofilen $u = u(z)$ og trykket i væsken når trykket i origo er p_0.

b) Finn energidissipasjonen $\Delta = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}^2$, pr. volumenhet og tidsenhet i et vilkårlig punkt i væsken.

c) Sett opp varmetransportlikningen for væsken. Vi antar at energidissipasjonen er eneste varmekilde. Bestem temperaturen $T = T(z)$ når begge sideveggene har temperatur T_0.

SLUTT