UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 3220 — Viskøse væsker og elastiske medier.
Eksamensdag:	Torsdag 1. desember 2011.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er tilsammen 11 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 110.

Oppgave 1 (vekt 50)

Vi ser på et to-dimensjonalt homogent isotropt elastisk medium med tetthet ρ og elastisitetsparametere λ og μ. Forskyvningsfeltet har formen $\vec{u} = u(x,t)\vec{i} + v(x,t)\vec{j}$. $\vec{i}$ og $\vec{j}$ er enhetsvektorer i henholdsvis $x-$ og $y-$retning.

1a (vekt 10)

Vis at løsningen for de to komponentene er uavhengige og kan skrives

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_j^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{2}$$

Hva er uttrykkene for c_i og c_j?

1b (vekt 10)

De to komponentene over representerer en longitudinal- og en transversalbølge. Finn forholdet mellom elastisitetsparametrene hvis den ene bølgen beveger seg dobbelt så raskt som den andre. Hvilken bølge har størst hastighet?

1c (vekt 10)

En mulig løsning av ligningene over er $\vec{u} = f(x - c_i t)\vec{i} + f(x - c_j t)\vec{j}$. Finn et uttrykk for spenningstensoren i dette tilfellet.

(Fortsettes på side 2.)

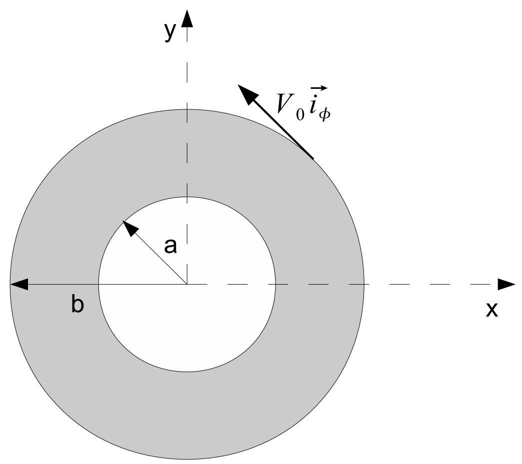
1d (vekt 10)

Finn hovedspenningene og hovedspenningsretningene for $t = 0$. Er retningen avhengig av f?

1e (vekt 10)

Hvis $f(\eta) = sin(\eta)$, når er da $\vec{i}$ og $\vec{j}$ hovedspenningsretninger med forskjellige hovedspenninger? (Forholdet mellom bølgehastighetene er som gitt i oppgave b)

Oppgave 2 (vekt 60)



Området mellom to konsentriske sylindere med radius a og b er fyllt med en inkompressibel newtonsk væske med tetthet ρ og kinematisk viskositet ν(Dette er det grå området i figuren). Den ytterste sylinderen roterer med hastighet $\vec{v} = V_0\vec{i}_\phi$, mens den innerste sylinderenen er i ro. Vi antar at væskebevegelsen er to-dimensjonal og stasjonær slik at den kan skrives på formen $\vec{v} = v(r)\vec{i}_\phi$. Det er ingen trykkgradienter i væsken bortsett fra den som blir indusert av bevegelsen til den ytre sylinderen. ∇-operatoren i sylinderkoordinater er $\nabla = \vec{i}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{i}_z\frac{\partial}{\partial z}$. Hvis du ønsker mer informasjon om sylinderkoordinater kan du se bakerst i oppgavesettet.

2a (vekt 10)

Vis at under de gitte antagelsene kan Navier-Stokes ligninger forenkles til

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\frac{v^2}{r} \tag{3}$$

(Fortsettes på side 3.)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = 0 \tag{4}$$

Hva sier ligning 3 om partikkelbanene?

2b (vekt 10)

Bestem $v(r)$(Hint: Prøv en løsning på formen $v(r) = Ar^n$ hvor n er ukjent)

2c (vekt 10)

Vis at dissipasjonen i væsken er på formen $\Delta = \alpha r^{-4}$, hvor α er en konstant.

2d (vekt 10)

Finn α uttrykt ved skjærspenningen på den ytterste sylinderen.(Du trenger ikke å finne uttrykket for skjærspenningen).

2e (vekt 10)

Vi skal nå se på temperaturfeltet i væsken. Skriv opp den generelle varmetransportligningen for et inkompressibelt Newtonsk fluid of forklar hvilke fysiske prosesser de ulike leddene representerer.

2f (vekt 10)

Vi ser på det tilfellet hvor den innerste sylinderen holdes ved konstant temperatur T_0 og den yttereste holdes ved konstant temperatur T_1. Vi antar at temperaturen i væsken har formen $T(r)$. Bestem temperaturfeltet i væsken.

Informasjon om sylinderkoordinater(Ikke en oppgave!)

Sylinderkoordinatene (r, ϕ, z) har følgende relasjon til de kartesiske koordinatene:

$$x = r\,cos(\phi) \quad y = r\,sin(\phi) \quad z = z \tag{5}$$

Enhetsvektorene i sylinderkoordinater utrykt ved de kartesiske er:

$$\vec{i}_r = cos(\phi)\vec{i} + sin(\phi)\vec{j} \quad \vec{i}_\phi = -sin(\phi)\vec{i} + cos(\phi)\vec{j} \quad \vec{i}_z = \vec{i}_z \tag{6}$$

Med hastighetskomponenter gitt ved (v_r, v_ϕ, v_z) får vi disse ligningene:

Kontinuitetsligningen:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}(v_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \tag{7}$$

konvektiv derivert:

$$\vec{v} \cdot \nabla = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\phi\frac{\partial}{\partial \phi} + v_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{8}$$

(Fortsettes på side 4.)

Laplace operator:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{9}$$

r-momentum:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)v_r - \frac{1}{r}v_\phi^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}) \tag{10}$$

ϕ-momentum:

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)v_\phi + \frac{1}{r}v_\phi v_r = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu(\nabla^2 v_\phi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2}) \tag{11}$$

z-momentum:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)v_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu(\nabla^2 v_z) \tag{12}$$

Energiligningen:

$$\rho c_p[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)T] = k\nabla^2 T + \mu(2(\epsilon_{rr}^2 + \epsilon_{\phi\phi}^2 + \epsilon_{zz}^2) + \epsilon_{\phi z}^2 + \epsilon_{rz}^2 + \epsilon_{r\phi}^2) \tag{13}$$

hvor

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad \epsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{14}$$

$$\epsilon_{\phi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \quad \epsilon_{rz} = \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad \epsilon_{r\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \tag{15}$$

SLUTT