UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK3220 — Kontinuumsmekanikk

Eksamensdag: Mandag 3. desember 2012

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 30%)

I det kartesiske koordinatsystem x, y, z er spenningstensoren gitt ved

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} a & \tau & 0 \\ \tau & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \tag{1}$$

hvor a, b og τ er konstanter.

1a

Finn spenningen på plan med normalvektoren $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})/\sqrt{2}$ hvor $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$ er enhetsvektorene i henholdsvis x og y retning.

1b

Bestem normalspenningen og tangensialspenningen (størrelse og retning) på planet definert i a).

1c

Finn prisipalspenningene og prinsipalretningene.

Oppgave 2 (vekt 30%)

Et to-dimensjonalt forskyvningsfelt i x, y planet er gitt ved

$$\boldsymbol{u} = \{\beta + \alpha y, \alpha + \beta x\},$$

hvor $0 < \alpha \ll 1$ og $|\beta| \ll 1$.

(Fortsettes på side 2.)

2a

Skisser hvordan et kvadrat med hjørner (1, 0), (-1, 0), (0, 1) og (0, -1) deformeres av forskyvningsfeltet $\boldsymbol{u}$. Hvordan endres arealet for det deformerte kvadratet?

2b

Finn forskyvningsforskjellen $\triangle \boldsymbol{u}$ mellom to vilkårlige punkter i feltet med vektoriell avstand $\{\triangle x, \triangle y\}$. Bestem tensoren for relative forskyvningsforskjeller.

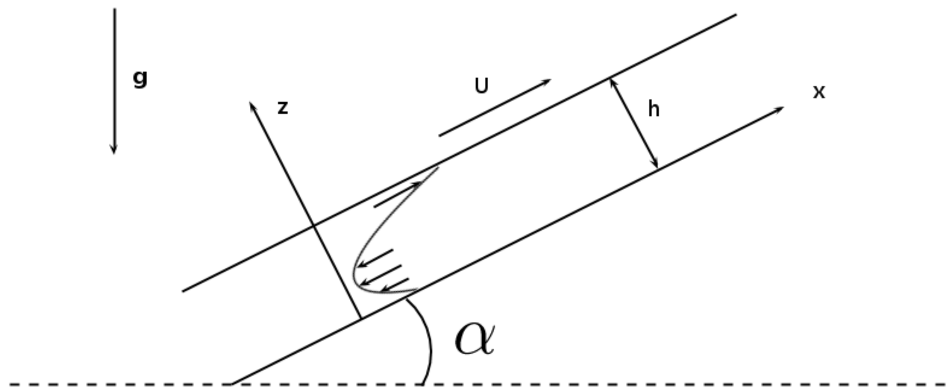
2c

Se bort fra translasjon slik at forskyvningen nå kan beskrives med

$$\boldsymbol{u} = \{\alpha y, \beta x\}.$$

Hva må forholdet være mellom α og β for at $\boldsymbol{u}$ skal kunne kvalifiseres som en tensor. (Hint: Rotasjonstensoren er gitt som $\boldsymbol{L} = \cos\theta \boldsymbol{ii} + \sin\theta \boldsymbol{ij} - \sin\theta \boldsymbol{ji} + \cos\theta \boldsymbol{jj}$ for rotasjon av koordinatsystemet med en vinkel θ.)

Oppgave 3 (vekt 40%)



En homogen inkompresibel Newtonsk væske med tetthet ρ og viskositet μ strømmer mellom to parallelle plater som ligger på skrå med helningsvinkel α. Strømmen er stasjonær og plan i xz-planet. Topp-plata har avstand h fra bunn-plata og trekkes med en konstant hastighet $\mathbf{U}$ i x-retningen. Bunnplata ligger i ro.

3a

Sett opp likningene, inkludert grensebetingelser, som beskriver strømningen mellom platene. Anta at hastighetsfeltet er uniformt i x-retningen. Gjør alle mulige forenklinger og begrunn hvorfor man har et hastighetsfelt på formen

$$\boldsymbol{v} = (u(z), 0, 0) \tag{2}$$

(Fortsettes på side 3.)

3b

Finn hastighetsfeltet under antagelsen at det ikke er noen trykkgradient i x-retningen.

3c

Anta nå at man forsøker å drive strømmen oppover i positiv x-retning ved å pålegge en ekstra trykk-kraft i x-retningen slik at $\partial p/\partial x = -\beta$, der konstanten $\beta > 0$. Finn trykket og hastighetsfeltet når trykket i origo er p_0. Bestem hvor stor β må være for at strømmen i netto skal bevege seg oppover.

3d

Finn energidissipasjonen $\triangle = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}^2$, pr. volumenhet og tidsenhet i et vilkårlig punkt i væsken. Hva representerer denne energidissipasjonen? [$\dot{\epsilon}_{ij} = 0.5(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$]

SLUTT