Oppg. 17 ***Torsjonssvingninger.*** En sirkulær elastik stav har radius a og en symmetrilinje som ligger langs x-aksen. Et tversnitt er da parallelt med yz planet. I kap. 9.6 i kompendiet antar vi likevekt med et forrykningsfelt

$$\vec{u} = r(qx + q_0)\mathbf{i}_\phi = (qx + q_0)(-z\mathbf{j} + y\mathbf{k}).$$

Dette svarer til at hvert tverrsnitt er dreiet en vinkel $\theta = qx + q_0$ om x-aksen.
I denne oppgaven skal vi anta at dreiningsvinkelen er en mer generell funksjon av x og t:

$$\vec{u} = r\theta(x,t)\mathbf{i}_\phi = \theta(x,t)(-z\mathbf{j} + y\mathbf{k}). \tag{21}$$

a) Vis at spenningstensoren er gitt ved

$$\mathcal{P} = \mu\frac{\partial\theta}{\partial x}(\mathbf{i}\,\mathbf{i}_\phi + \mathbf{i}_\phi\,\mathbf{i}), \tag{22}$$

og at sideflatene på sylinderen er spenningsfrie.

b) Vis at θ oppfyller likningen

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = c_S^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \tag{23}$$

der $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ er skjærbølgehastigheten.

c) Forklar hvorfor θ må være lineær når vi har likevekt.

d) Vis at det totale momentet, om x-aksen, som virker på et tverrsnitt x =konstant er

$$M(x)\mathbf{i} = \frac{\pi}{2}\mu\frac{\partial\theta}{\partial x}a^4\mathbf{i}.$$

e) Først antar vi at stangen er fast (fastholdt tverrsnitt) i $x = 0$, mens den andre enden $x = \ell$ er spenningsfri. Vis at θ da oppfyller (23) med randbetingelsene

$$\theta(0,t) = 0, \quad \frac{\partial\theta(\ell,t)}{\partial x} = 0. \tag{24}$$

Anta egensvingninger på formen

$$\theta = F(x)\sin(\omega_E t)$$

Finn F og vis at vi har et uendelig antall egensvingninger med frekvenser

$$\omega_E^{(n)} = \frac{c_S}{\ell}\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi,$$

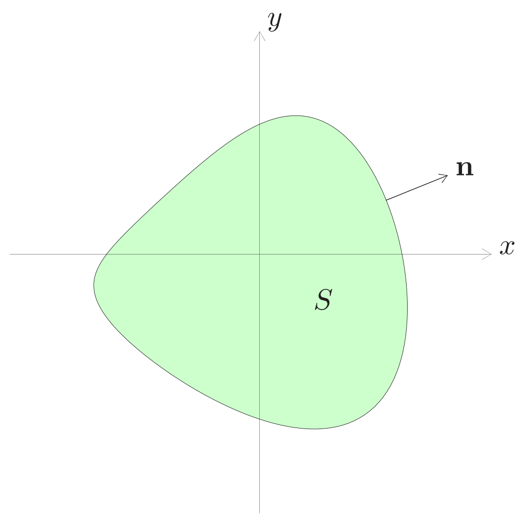
for $n = 1, 2, 3.....$

f) Vi antar nå at stangen er fast ved $x = 0$ og har en tynn plate med radius R og masse m festet i den andre enden ved $x = \ell$. Dette svarer til fig. 9.12 i kompendiet. For skiva bruker vi spinnsatsen om punktet $x = \ell$, $y = z = 0$. Forklar at denne blir

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -M(\ell),$$

der $S = I\frac{\partial\theta(\ell,t)}{\partial t}$ og treghetsmomentet, I, er $I = \frac{1}{2}mR^2$. Vis at θ nå må oppfylle (23) med randbetingelsene

$$\theta(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^2\theta(\ell,t)}{\partial t^2} = -\frac{\pi}{2I}\mu\frac{\partial\theta(\ell,t)}{\partial x}a^4. \tag{25}$$



Figur 2: Tverrsnitt av bjelke.

g) Anta en periodisk svingning på formen

$$\theta = F(x)\sin(\omega t).$$

Vis at

$$F(x) = \sin(kx) \quad \text{der} \quad k = \frac{\omega}{c_S},$$

og at frekvensen oppfyller likningen

$$\sin(k\ell)\omega^2 = \frac{\pi}{2I}\mu k \cos(k\ell) a^4.$$

h) På mekanikeres vis skal vi plage oppgaveløseren med en ekstra runde med tilnærmelser. Anta at $k\ell$ er veldig liten. Forklar hvorfor dette svarer til at tiden en skjærbølge bruker på å gå gjennom sylinderen er mye mindre enn en svingeperiode og at $\omega_E^{(1)} \gg \omega$. Vis at vi da får frekvensen i eksemplet tilhørende fig. 9.2

Oppg. 18 ***Torsjon av stav med generelt tverrsnitt.*** En stav med generelt tverrsnitt (se figur 2) utsettes for et moment om x-aksen. Vi antar et forrykningsfelt på formen

$$\mathbf{u} = r\theta(x)\mathbf{i}_\phi + \psi(y,z)\mathbf{i}, \tag{26}$$

der vi bruker sylinderkoordinater med x-aksen i sylinderens lengderetning.

a) Vis at vi må ha oppfylt

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} = 0, \quad \nabla_T^2\psi = 0, \tag{27}$$

der

$$\nabla_T = \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

er tverrkomponenten av del-operatoren.

b) Finn spenningstensoren uttrykt ved ψ og θ.

c) Vis at spenningsfri rand medfører randbetingelsen

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = rq\cos(\alpha), \tag{28}$$

der q er en konstant og α er vinkelen mellom $\mathbf{n}$ og $\mathbf{i}_\phi$. Bestemmer (27) og (28) ψ entydig ? Hvis ikke: hva svarer flertydigheten til?
Ofte transformeres problemet videre og det har enkel løsning for noen profiler, i tillegg til sirkelen.