

Oppgaver for Mek 3220

Geir Pedersen

Høst 2013

Oppgavene som følger kommer i tillegg til oppgaver i kompendiet og gamle eksamensoppgaver på nettet. Nye oppgaver vil kunne komme til i løpet av semesteret og vil bli lagt til fortløpende.

Oppg. 1 . Vi har

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j.$$

Vis at denne tilsvarer uttrykket

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{i} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}.$$

Oppg. 2 *Virvling i polarkoordinater.* Vi har gitt et vektorfelt i sylindervektorkoordinater

$$\mathbf{v} = v_r(r, \theta) \mathbf{i}_r + v_\theta(r, \theta) \mathbf{i}_\theta.$$

Bruk

$$\nabla = \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

til å utlede en formel for $\nabla \times \mathbf{v}$ i sylindervektorkoordinater. Sjekk resultatet ved å sammenlikne med en formelsamling.

Oppg. 3 $\nabla \mathbf{v}$ i polarkoordinater. Vi har gitt et vektorfelt i sylindervektorkoordinater

$$\mathbf{v} = v_r(r, \theta) \mathbf{i}_r + v_\theta(r, \theta) \mathbf{i}_\theta.$$

$$\nabla = \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

Finn formel for $\nabla \mathbf{v}$ og $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ i sylindervektorkoordinater.

Oppg. 4 *Momentumflukstettheten.*

a) Vi betegner hastighetsvektoren i en væske med $\mathbf{v} = v_i \mathbf{i}_i$ og massetettheten med ρ . Forklar hvorfor tensoren (her skrevet på dyade-form)

$$\rho \mathbf{v} \mathbf{v} = \rho v_i v_j \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j, \tag{1}$$

gir konvektiv transport-tetthet av momentum (bevegelsesmengde) slik at

$$\int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} d\sigma,$$

gir transporten gjennom flaten σ på grunn av hastighetsfeltet.

b) Vis ved indeksnotasjon og å behandle ∇ som formell vektor at

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = (\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})) \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}. \tag{2}$$

Oppg. 5 Maksimum normal og skjærspenning. I denne oppgaven analyserer vi spenningen i ett bestemt punkt i et kontinuum. Målet er å knytte ekstremale normal og skjærspenninger til prinsipalspenninger og prinsipalretninger.

a) Vi anser prinsipalretninger og spenninger som kjente og velger et koordinatsystem der aksene peker i prinsipalretningene. Forklar at spenningstensoren, \mathcal{P} , blir diagonal og at den kan skrives

$$\mathcal{P} = \sigma_i \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i, \quad (3)$$

der σ_i er prinsipalspenningene og det er sum over i .

b) Vis at for en flate med enhetsnormal $\mathbf{n} = n_i \mathbf{i}_i$ blir størrelsen av normalspenningen

$$P_n = \sigma_i (n_i)^2, \quad (4)$$

der det er sum over i , mens tangensialspenningen blir

$$\mathbf{P}_T^2 = (\sigma_i)^2 (n_i)^2 - P_n^2, \quad (5)$$

der det igjen er sum over i .

c) Vis at maksimum normalspenning oppnås når \mathbf{n} peker i den prinsipalretning som har størst prinsipalspenning. Maksimal normalspenning blir da $\max(|\sigma_i|)$.

d) Maksimum skjærspenning finnes ved å maksimere \mathbf{P}_T over alle n_1, n_2, n_3 som oppfyller $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Vis at dersom vi innfører de to fri variablene $\gamma = n_x^2$ og $\kappa = n_y^2$ får vi skjærspenningen uttrykt ved et enkelt polynom

$$F(\gamma, \kappa) = |\mathbf{P}_T|^2 = \sigma_1^2 \gamma + \sigma_2^2 \kappa + \sigma_3^2 (1 - \gamma - \kappa) - P_n^2, \quad (6)$$

der

$$P_n = \sigma_1 \gamma + \sigma_2 \kappa + \sigma_3 (1 - \gamma - \kappa).$$

Forklar at vi må ha $0 \leq \gamma \leq 1$, $0 \leq \kappa \leq 1$ og $\gamma + \kappa \leq 1$, som svarer til et trekantet område, Ω i γ, κ planet.

e) Vi antar nå at alle prinsipalspenningene er ulike. Vis at F ikke har noen ekstremalpunkter i det indre av Ω og at F derfor må ha maksimum når en n_i er null.

f) Velg $n_3 = 0$ og finn den maksimale verdien F da kan ha.

g) Forklar at svaret fra forrige delpunkt innebærer at maksimal skjærspenning er

$$|\mathbf{P}_T|_{\max} = \frac{1}{2} \max |\sigma_i - \sigma_j|, \quad (7)$$

og inntreffer når \mathbf{n} ligger midt mellom prinsipalretningene i og j .

h) Anta at $\sigma_2 = \sigma_3$ og finn retninger for maksimum skjærspenning da.

Oppg. 6 . Forklar at spenningstensoren kan uttrykkes

$$\mathcal{P} = \mathbf{i}_i \mathbf{P}_i,$$

der \mathbf{P}_i er spenningen på flaten med normalvektor \mathbf{i}_i . Vis

$$\nabla \cdot \mathcal{P} = \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial x_i}.$$

Oppg. 7 Inversjon av stress-strain relasjoner. For et isotropt elastisk medium har vi

$$p_{ij} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}.$$

der λ og μ er Lamés parametere.

a) Vis at

$$S_{\mathcal{P}} = (3\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{u},$$

der $S_{\mathcal{P}} = p_{ii}$ er sporet til spenningstensoren.

b) Vis

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(p_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} S_{\mathcal{P}} \delta_{ij} \right).$$

c) Anta at vi har en en-dimensjonal spenningstilstand, dvs. $\mathcal{P} = p_{zz} \mathbf{k}\mathbf{k}$. Finn alle komponenter i tøyningstensoren i dette tilfellet.

Oppg. 8 Beregning av deformasjonsfelt for strekking av stav. En uniform, lang stav påføres en endelast F i z retning. Vi får da det som kompendiet kaller en en-dimensjonal spenningstilstand der

$$p_{zz} = \frac{F}{q},$$

der q er arealet av tverrsnittet av staven. Videre vil forrige oppgave gi

$$e_{zz} = \frac{\sigma}{E}, \quad e_{xx} = e_{yy} = -\nu \frac{\sigma}{E},$$

der E og ν er hhv. Youngs modul og Poissons forhold, mens

$$e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0.$$

For å bestemme entydige forrykninger, $\{u_x, u_y, u_z\}$, krever vi at \mathbf{u} er null i origo og at vi ikke har stivt legeme bevegelse, dvs.

$$\mathcal{D}_r = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^*) = 0.$$

- a) Finn først uttrykk for alle partieltderiverte av u_x , u_y og u_z .
- b) Finn feltet $\mathbf{u}(\mathbf{r})$.

Oppg. 9 *Spenningsfeltet for torsjon av sirkulær stav.* Torsjonsfeltet for en sirkulær stav er gitt som

$$\mathbf{u} = qxr\mathbf{i}_\phi,$$

i sylindervektor koordinater (r, ϕ, x) og

$$\mathbf{u} = qx(-z\mathbf{j} + y\mathbf{k}),$$

i kartesiske koordinater.

a) Regn i kartesiske koordinater og vis at

$$\mathcal{P} = \mu q \begin{Bmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

b) Bruk resultatet fra forrige deloppgave til å finne prinsipspenninger og retninger (hold deg i kartesiske koordinater). Vis at retningene svarer til $\mathbf{n} = \pm\mathbf{i}_r, \sqrt{\frac{1}{2}}(\pm\mathbf{i} \pm \mathbf{i}_\phi)$

c) Bruk sylindervektor koordinater og vis at

$$\mathcal{P} = \mu qr(\mathbf{i}\mathbf{i}_\phi + \mathbf{i}_\phi\mathbf{i}).$$

d) Benytt uttrykket for \mathcal{P} i sylindervektor koordinater til å finne prinsipspenninger og retninger. En grei start er å sette $\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_r\mathbf{i}_r + n_\phi\mathbf{i}_\phi$ og sette opp $(\mathcal{P} - \sigma I) \cdot \mathbf{n} = 0$ som et sett av homogene likninger.

Oppg. 10 Knyttet til oppgave 4, kap. 9.8 i kompendium.

Vi antar at den innkommende bølgen kan ha en generell form

$$u_I = F(k_1x - \omega t),$$

der F er en funksjon. Anta videre at

$$u_R = R F(-k_1x - \omega t),$$

$$u_T = T F(k_2x - \omega t).$$

Kan du besvare punktene b og c fra oppgave 4, kap. 9.8 nå?

Oppg. 11 Poiseulle strøm i ikke-sirkulære rør. Et rør er uniformt i lengderetningen, som svarer til x akse, men har et generelt tverrsnitt som svarer til et område Ω i y - z planet. Langs røret er det et trykkfall som driver bevegelsen, mens rørvæggen er i ro.

a) Anta at hastighetsfeltet har formen

$$\mathbf{v} = u(y, z)\mathbf{i}.$$

Vis at trykkgradienten langs røret må være konstant og sett denne til $-\beta$.

b) Vis at u må oppfylle randverdiproblemet

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -\frac{\beta}{\mu}, \quad \text{i området } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{på randa av } \Omega. \end{aligned}$$

c) Anta at røret er sirkulært med radius a . Innfør sylindervektor (koordinater (r, θ, x)) og løs randverdiproblemet for u i dette tilfellet.

d) Gå tilbake til kartesiske koordinater. Vi antar nå at randa til Ω er en ellipse gitt ved

$$F(y, z) = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Vis at

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \text{konstant},$$

og benytt dette til å finne u .

Oppg. 12 Couettestrøm mellom sylindere. Vi antar at rommet mellom to konsentriske sylindere, med radius hhv. a og b er fylt med væske. Legg x -aksen langs røret. Den ytre cylinderen har hastighet $U\mathbf{i}$ (i lengderetning av røret), mens den indre cylinderen er i ro. Vi antar at det ikke er trykkgradienter langs røret og at hastigheten kan skrives

$$\mathbf{v} = u(r)\mathbf{i},$$

der r er avstanden fra sylindereenes (felles) akse.

a) Finn u .

b) Finn skjærspenningene på den ytre og den indre cylinderen. Forklar hvorfor de må være ulike.

Oppg. 13 Det enkleste grensesjiktspørsmålet ?. Vi har en uendelig lang plate som faller sammen med xy -planet (I Blasiusproblemet har vi en halvuendelig plate). Over denne er det en Newtonsk væske. For $t = 0$ er væsken i ro, men deretter settes platen i bevegelse med konstant hastighet $U\mathbf{i}$ i x -retning. Over tid vil det da vokse opp et viskøst grensesjikt ved platen. I motsetning til Blasius-grensesjiktet har dette ingen variasjon i x -retning og strømmen er også parallell med x -aksen. Derimot er ikke strømmen stasjonær. Det er ingen trykkgradient langs platen.

a) Vi retter z -aksen normalt platen og antar $\mathbf{v} = u(z, t)\mathbf{i}$. Vis at u må oppfylle randverdi-problemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad u(z, 0) = 0, \quad u(0, t) = U. \quad (8)$$

Hvilken standardlikning er dette ?

b) Vi antar (håper) at u kan uttrykkes som en similaritetsløsning

$$u = UF(\eta), \quad \text{der} \quad \eta = \frac{z}{\delta(t)}.$$

Dette kan kalles en similaritetsløsning fordi vi har samme form på profiler langs for alle t , men profilene strekkes når t (og δ) øker. Vis at differensiallikningen i (8) nå gir

$$\frac{\delta \delta'}{\nu} \eta F' + F'' = 0,$$

og forklar at en løsning er mulig dersom

$$\delta(t) = C\sqrt{\nu t},$$

der C er en konstant som, feks., kan velges lik 2 slik at

$$F''(\eta) + 2\eta F'(\eta) = 0. \quad (9)$$

Forklar at randbetingelser for F blir

$$F(0) = 1, \quad F(\infty) = 0.$$

c) Vis at når du løser differensiallikningen (9) og bruker den ene randbetingelsen får du

$$F = 1 + A \int_0^\eta e^{-s^2} ds,$$

der A er en konstant som ennå ikke er bestemt. Du bør ikke prøve å løse ut dette integralet i formel.

d) Bruk (uten bevis!) at

$$\int_0^\infty e^{-s^2} ds = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

slik at du kan skrive løsningen som

$$F = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\delta(t)}\right), \quad (10)$$

der erf er *feilfunksjonen* definert ved

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

e) Matlab har ferdige rutiner for å beregne $\operatorname{erf}(x)$ (skriv **doc erf**). Bruk Matlabs, eller et annet egnet verktøys, rutine for $\operatorname{erf}(x)$ til å plote F som funksjon av η .

f) Vi skal nå sammenlikne grensesjiktet i denne oppgaven med Blasius-grensesjiktet. Vi har vist at grensesjiktstykkelsen vokser med tiden som $\delta(t) = C\sqrt{\nu t}$. For Blasiusprofilen kan vi tenke oss at denne tiden svarer til tiden den ytre strømmen har følt plata, dvs. tiden en partikkel i den ytre strømmen bruker fra forkant av plata til x . Bruk dette og uttrykket for δ ovenfor til å anslå hvordan tykkelsen for Blasius-grensesjiktet varierer med x . Er resultatet korrekt ?

Oppg. 14 Regnskap for bevegelsesmengde. Vi skal se på momentumlikningen for et endelig volum og knytte denne til bevegelseslikningen.

Først en knapp innledning. For et system av partikler er bevegelsesmengden

$$\mathbf{I} = \sum m\mathbf{v}.$$

Massemiddepunktsatsen kan da uttrykkes som

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{F},$$

der \mathbf{F} er summen av ytre krefter. Dersom de ytre kreftene er null i sum sier denne likningen at bevegelsesmengden er bevart.

For et endelig volum, τ , med overflate σ kan vi tilsvarende sette opp en bevaringssats for bevegelsesmengde

$$\begin{aligned} & \text{Tidsendring av bevegelsesmengde i } \tau \\ & = \text{spenningskraft på } \sigma + \text{resultant av volumkrefter på } \tau \\ & - (\text{utstrømsrate av bevegelsesmengde gjennom } \sigma) \end{aligned}$$

Satsen kan brukes på vektorform, eller for hver av komponentene. Vi holder oss til vektorformen i denne oppgaven, mens komponentformen brukes for grensesjikt i en senere oppgave.

a) Forklar hvorfor utstrømsrate av bevegelsesmengden gjennom et flatelement kan skrives

$$\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Vi kan tolke $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$ som en momentumtransport-tensor skrevet på dyadeform. Forklar videre hvorfor tidsendringsraten av bevegelsesmengde i et volumelement er

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} d\tau$$

b) Sett opp integraler for alle bidrag til bevaringssatsen for bevegelsesmengde og vis at dette fører til

$$\int_{\tau} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathcal{P} d\sigma + \int_{\tau} \rho \mathbf{g} d\tau - \int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (11)$$

der \mathcal{P} er spennings tensoren og \vec{g} er ytre volumkrefter regnet per masse. Denne relasjonen kan være utgangspunkt for integrerte betraktninger av bevegelsesmengde i en væske, feks. for grensesjikt.

c) Vis at den integrerte likningen for bevegelsesmengde i forrige delpunkt medfører

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathcal{P} + \rho\mathbf{g}.$$

d) Utled bevegelseslikningen, på standard form, fra resultatet i det forrige delspørsmålet. Hint: du må bruke kontinuitetslikningen og kan ha fordel av å se på oppgave 4.

Oppg. 15 Integrerte likninger brukt på grensesjikt. I “Blasius”-problemet har vi en halvuelendig plate fra $x = 0$ til $x = \infty$ og en ytre potensialstrøm $U\mathbf{i}$. Vi definerer et kontrollområde i xz planet som begrenses av (i): en linje normalt x -aksen med $0 \leq z \leq H$ for $x = a < 0$ (oppstrøms for plata); (ii) av x -aksen fra $x = a$ til en fritt valgbar x -verdi; (iv) en øvre begrensning $Z(x) = H + \Delta(x)$ som er strømlinje gjennom $x = a$ og $z = H$; (iii) en begrensning normalt x -aksen ved den valgte x som går fra $z = 0$ til $z = Z(x)$. Det er en forutsetning at $z = H$ er langt utenfor grensesjiktet. Tegn området.

a) Vi ser først på masseregnskapet. Siden ρ er konstant er dette ensbetydende med å se på et regnskap for volum. Forklar hvorfor det ikke er noen volumtransport gjennom (ii) og (iv) og hvorfor transporten inn ved (i) da er lik transporten ut ved (iii).

b) Vis at det forrige punkt fører til

$$0 = HU - \int_0^{Z(x)} u(x, z) dz. \quad (12)$$

Vis videre at dette fører til

$$\Delta(x) = \int_0^H \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz \approx \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz. \quad (13)$$

Δ kalles ofte *fortrengningstykkelsen*.

c) Så ser vi på x -komponenten av bevegelsesmengden. Vi tar da utgangspunkt i at venstresiden i (11) forsvinner (hvorfor?). Forklar hvorfor vi ikke får betydelige bidrag til spenningsleddet fra (i), (iii) eller (iv). Forklar videre hvorfor momentum ikke fraktes med strømmen gjennom (ii) og (iv).

d) Vis at (11) gir

$$0 = - \int_0^x \tau_0(\hat{x}) d\hat{x} + \rho HU^2 - \int_0^{Z(x)} \rho (u(x, z))^2 dz, \quad (14)$$

der $\tau_0(x) = p_{xz}(x, 0)$ er skjærspenningen på platen.

e) Bruk (12) til å skrive om relasjonen fra forrige punkt til

$$\int_0^x \tau_0(\hat{x}) d\hat{x} = \int_0^{Z(x)} \rho u (U - u) dz. \quad (15)$$

f) Forklar hvorfor skjærspenningen kan skrives som

$$\tau_0(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^b \rho u (U - u) dz \approx \int_0^b \frac{\partial}{\partial x} [\rho u (U - u)] dz, \quad (16)$$

der b kan være, feks., Z , ∞ eller en korrekt definert grensesjiktstykkelse δ_u , slik at $u(x, \delta_u) \approx U$.

g) Anta at hastighetsprofilen er gitt som

$$u = \begin{cases} \frac{U}{\delta_u} z & \text{hvis } z \leq \delta_u, \\ U & \text{hvis } z > \delta_u. \end{cases}$$

Bruk (16) til å finne $\delta_u(x)$ og sammenlikn med resultatet i kompendiet.

Oppg. 16 Numerisk beregning av Blasiusprofilen. For Blasiusprofilen kan hastigheten i x -retning skrives som

$$u = U f'(\zeta), \quad \zeta = \frac{z}{\delta(x)},$$

der

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

Funksjonen f oppfyller likningen

$$f''' + f f'' = 0, \tag{17}$$

med randbetingelser

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} f' = 1. \tag{18}$$

a) Skriv om (17) og (18) til et sett av førsteordenslikninger slik at du får

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ y_3' &= -y_1 y_3, \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

og randbetingelser

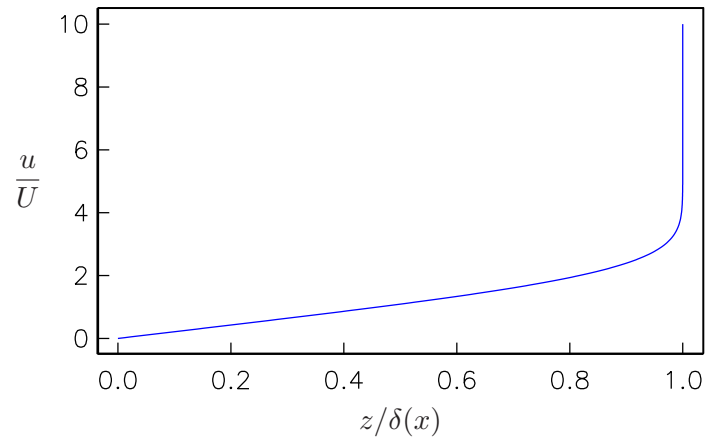
$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} y_2 = 1. \tag{20}$$

Problemet her er at vi har to betingelser ved $\zeta = 0$ og en ved $\zeta = \infty$.

b) En enkel løsningsteknikk for et ikkelineært randverdiproblem som (19) og (20) er *skytemetoden* som bygger på løsning av initialverdiproblemer. Hadde vi hatt en betingelse på $y_3(0)$, i stedet for en på y_2 i uendelig, ville en kunne integrert steg for steg fram i ζ vha. feks. Runge-Kuttas metode. I skytemetoden forsøker en å tilpasse en startverdi, $y_3(0) = a$, slik at vi "treffer" betingelsen ved den andre randa ved å integrere framover ved Runge-Kuttas metode. Betingelsen i $\zeta = \infty$ tilnærmer vi med $y_2(\zeta_\infty) = 1$, der ζ_∞ er stor nok – i dette problemet er $\zeta_\infty = 10$ greit, mens en generelt må prøve seg fram, eller bruke en asymptotisk analyse (dvs. tilnærming for store ζ).

I vårt tilfelle kan du følge prosedyren

1. Kod en løsningsteknikk for likningssettet i Matlab, eller et annet system du heller bruker, slik at a enkelt kan varieres og at $y_2(\zeta_\infty)$ skrives ut.
2. Velg et par verdier for a feks. 1 og 2 og beregn $y_2(\zeta_\infty)$ for disse.
3. Anta at $y_2(\zeta_\infty)$ varierer monotont med a og juster inn a manuelt til du har $|y_2(\zeta_\infty) - 1| < 0.001$. Sjekk at oppløsning er fin nok og at ζ_∞ er stor nok.
4. Tegn ut hastighetsprofilen slik som i figur 1.



Figur 1: Profil beregnet vha. numerisk integrasjon

c) Fortrengningstykkelsen er gitt som

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz.$$

Vis at denne blir

$$\Delta = \left\{ \lim_{\zeta \rightarrow \infty} (\zeta - F) \right\} \delta(x),$$

og beregn konstanten foran δ med den numeriske løsningen funnet ovenfor.

Oppg. 17 Torsjonssvingninger. En sirkulær elastisk stav har radius a og en symmetrilinje som ligger langs x -aksen. Et tverrsnitt er da parallelt med yz planet. I kap. 9.6 i kompendiet antar vi likevekt med et forrykningsfelt

$$\vec{u} = r(qx + q_0)\mathbf{i}_\phi = (qx + q_0)(-z\mathbf{j} + y\mathbf{k}).$$

Dette svarer til at hvert tverrsnitt er dreiet en vinkel $\theta = qx + q_0$ om x -aksen.

I denne oppgaven skal vi anta at dreiningsvinkelen er en mer generell funksjon av x og t :

$$\vec{u} = r\theta(x, t)\mathbf{i}_\phi = \theta(x, t)(-z\mathbf{j} + y\mathbf{k}). \quad (21)$$

a) Vis at spenningstensoren er gitt ved

$$\mathcal{P} = \mu \frac{\partial \theta}{\partial x} (\mathbf{i}\mathbf{i}_\phi + \mathbf{i}_\phi\mathbf{i}), \quad (22)$$

og at sideflatene på cylinderen er spenningsfrie.

b) Vis at θ oppfylder likningen

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (23)$$

der $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ er skjærbølgehastigheten.

c) Forklar hvorfor θ må være lineær når vi har likevekt.

d) Vis at det totale momentet, om x -aksen, som virker på et tverrsnitt $x = \text{konstant}$ er

$$M(x)\mathbf{i} = \frac{\pi}{2} \mu \frac{\partial \theta}{\partial x} a^4 \mathbf{i}.$$

e) Først antar vi at stangen er fast (fastholdt tverrsnitt) i $x = 0$, mens den andre enden $x = \ell$ er spenningsfri. Vis at θ da oppfylder (23) med randbetingelsene

$$\theta(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta(\ell, t)}{\partial x} = 0. \quad (24)$$

Anta egensvingninger på formen

$$\theta = F(x) \sin(\omega_E t)$$

Finn F og vis at vi har et uendelig antall egensvingninger med frekvenser

$$\omega_E^{(n)} = \frac{c_s}{\ell} \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi,$$

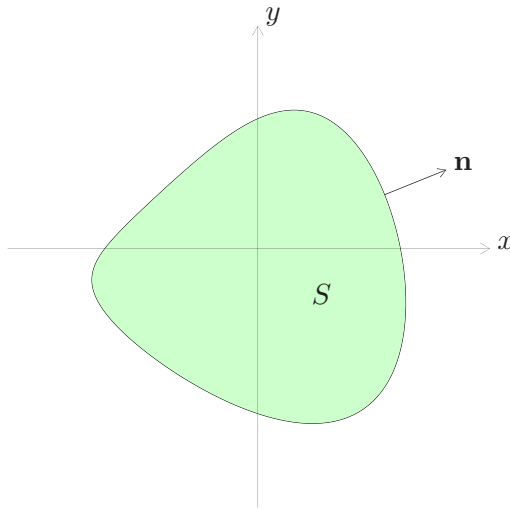
for $n = 1, 2, 3, \dots$

f) Vi antar nå at stangen er fast ved $x = 0$ og har en tynn plate med radius R og masse m festet i den andre enden ved $x = \ell$. Dette svarer til fig. 9.12 i kompendiet. For skiva bruker vi spinnsatsen om punktet $x = \ell, y = z = 0$. Forklar at denne blir

$$\frac{dS}{dt} = -M(\ell),$$

der $S = I \frac{\partial \theta(\ell, t)}{\partial t}$ og treghetsmomentet, I , er $I = \frac{1}{2} m R^2$. Vis at θ nå må oppfylle (23) med randbetingelsene

$$\theta(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta(\ell, t)}{\partial t^2} = -\frac{\pi}{2I} \mu \frac{\partial \theta(\ell, t)}{\partial x} a^4. \quad (25)$$



Figur 2: Tverrsnitt av bjelke.

g) Anta en periodisk svingning på formen

$$\theta = F(x) \sin(\omega t).$$

Vis at

$$F(x) = \sin(kx) \quad \text{der} \quad k = \frac{\omega}{c_S},$$

og at frekvensen oppfyller likningen

$$\sin(k\ell)\omega^2 = \frac{\pi}{2I}\mu k \cos(k\ell)a^4.$$

h) På mekanikers vis skal vi plage oppgaveløseren med en ekstra runde med tilnærmelser. Anta at $k\ell$ er veldig liten. Forklar hvorfor dette svarer til at tiden en skjærbølge bruker på å gå gjennom sylindren er mye mindre enn en svingeperiode og at $\omega_E^{(1)} \gg \omega$. Vis at vi da får frekvensen i eksemplet tilhørende fig. 9.2

Oppg. 18 Torsjon av stav med generelt tverrsnitt. En stav med generelt tverrsnitt (se figur 2) utsettes for et moment om x -aksen. Vi antar et forrykningsfelt på formen

$$\mathbf{u} = r\theta(x)\mathbf{i}_\phi + \psi(y, z)\mathbf{i}, \quad (26)$$

der vi bruker sylinderkoordinater med x -aksen i sylindrens lengderetning.

a) Vis at vi må ha oppfylt

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = 0, \quad \nabla_T^2\psi = 0, \quad (27)$$

der

$$\nabla_T = \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

er tverrkomponenten av del-operatoren.

- b) Finn spennings tensoren uttrykt ved ψ og θ .
c) Vis at spenningsfri rand medfører randbetingelsen

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = r q \cos \alpha, \quad (28)$$

der q er en konstant og α er vinkelen mellom \mathbf{n} og \mathbf{i}_ϕ . Bestemmer (27) og (28) ψ entydig? Hvis ikke: hva svarer flertydigheten til?

Ofte transformeres problemet videre og det har enkel løsning for noen profiler, i tillegg til sirkelen.

Oppg. 19 *Sylinderkoordinater.* Et vektorfelt er gitt i sylinderkoordinater

$$\mathbf{v} = u(r, \theta, z)\mathbf{i}_r + v(r, \theta, z)\mathbf{i}_\theta + w(r, \theta, z)\mathbf{k}.$$

Det er også gitt at gradientoperatoren kan skrives

$$\nabla = \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

I denne oppgaven skal vi finne en rekke viktige relasjoner i kurset vha. dyaderegning.

a) Vis at

$$\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} = \mathbf{i}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{i}_r.$$

b) Vis

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

og

$$\nabla^2 \beta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \beta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2},$$

der β er et skalarfelt.

c) Vis

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} = & \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{i}_r \mathbf{i}_r & + \frac{\partial v}{\partial r} \mathbf{i}_r \mathbf{i}_\theta & + \frac{\partial w}{\partial r} \mathbf{i}_r \mathbf{k} \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) \mathbf{i}_\theta \mathbf{i}_r & + \frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_\theta \mathbf{i}_\theta & + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta \mathbf{k} \\ & + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{i}_r & + \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{i}_\theta & + \frac{\partial w}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{k} \end{aligned}$$

d) Vis

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_r + \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_\theta + (\nabla^2 w) \mathbf{k}.$$

Det kan lønne seg å vise denne for $\mathbf{v} = u\mathbf{i}_r$ og $\mathbf{v} = v\mathbf{i}_\theta$ separat.

e) Vis at tøyingsratetensoren kan uttrykkes

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{D}} = & \dot{\epsilon}_{rr} \mathbf{i}_r \mathbf{i}_r & + \dot{\epsilon}_{r\theta} \mathbf{i}_r \mathbf{i}_\theta & + \dot{\epsilon}_{rz} \mathbf{i}_r \mathbf{k} \\ & + \dot{\epsilon}_{r\theta} \mathbf{i}_\theta \mathbf{i}_r & + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} \mathbf{i}_\theta \mathbf{i}_\theta & + \dot{\epsilon}_{\theta z} \mathbf{i}_\theta \mathbf{k} \\ & + \dot{\epsilon}_{rz} \mathbf{k} \mathbf{i}_r & + \dot{\epsilon}_{\theta z} \mathbf{k} \mathbf{i}_\theta & + \dot{\epsilon}_{zz} \mathbf{k} \mathbf{k} \end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \dot{\epsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right), & \dot{\epsilon}_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right), & \dot{\epsilon}_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), & \dot{\epsilon}_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

f) For en inkompressibel væske er spenningstensoren gitt ved

$$\mathcal{P} = -pI + 2\mu\dot{\mathcal{D}}.$$

Finn \mathbf{P}_n for $\mathbf{n} = \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{k}$.

g) Vi skriver $\mathcal{P} = p_{rr}\mathbf{i}_r\mathbf{i}_r + \dots$ og søker prinsipalretninger og prinsipalspenninger i polarkoordinater. Sett opp egenverdi-problemet som gir disse.

h) Forklar hvorfor dissipasjonen kan uttrykkes

$$\Delta = 2\mu\dot{\mathcal{D}} \cdot \dot{\mathcal{D}},$$

som gir

$$\Delta = 2\mu (\dot{\epsilon}_{rr}^2 + \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^2 + \dot{\epsilon}_{zz}^2 + 2(\dot{\epsilon}_{r\theta}^2 + \dot{\epsilon}_{rz}^2 + \dot{\epsilon}_{\theta z}^2),)$$