

Kapittel 3 Elastisk-plastisk bruddmekanikk

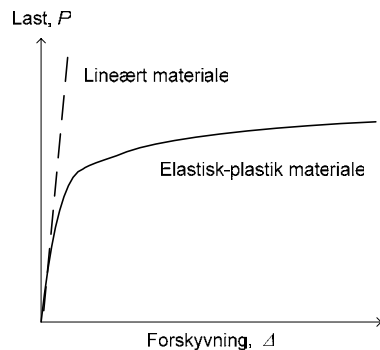
Forelesningsnotater i MEK 4520 Bruddmekanikk

Hans A. Bratfos

Lærebok: T.L. Anderson, Fracture Mechanics Fundamentals and Applications, 3rd edition.

Introduksjon

Den lineær-elastiske bruddmekanikken møter sin begrensning i praktisk anvendelse på moderne konstruksjoner i metall fordi metallene er plastiske ved store belastninger. Vi må ta hensyn til at materialets last-forkyvningskurven ikke er lineær.



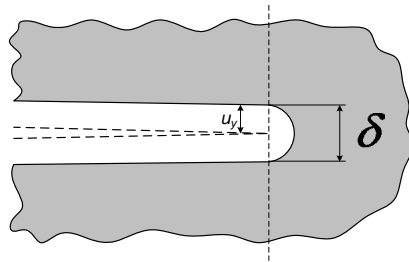
Den elastisk-plastiske bruddmekanikken; EPFM (eng.: Elastic-Plastic Fracture Mechanics), er langt på veg en utvidelse av LEFM. Kunnskapen fra kapittel 2 kommer derfor til god anvendelse videre. Vi skal imidlertid innføre to nye brudd-parametere:

- CTOD: Åpningen ved sprekkspissen
- J-integralet: Utvidelse av Energy Release Rate

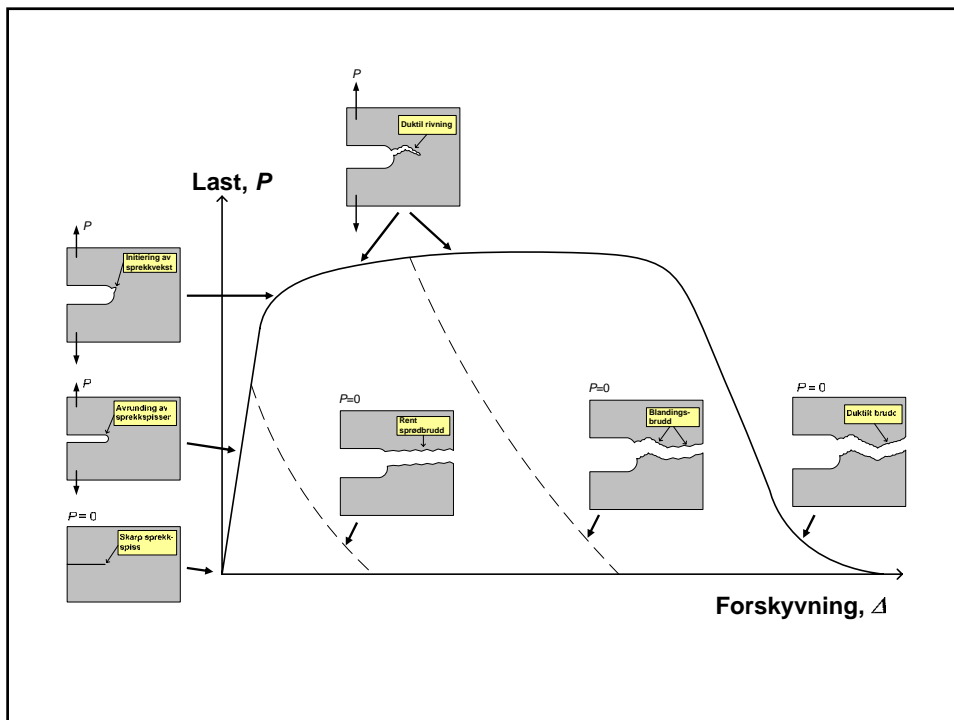
Crack Tip Opening Displacement (Kap. 3.1)

Vi har allerede vist hvordan sprekkespissen plastiseres og avrundes ved pålastning. Tidlig på 1960-tallet ble det foreslått at åpningen ved sprekkespissen kunne anvendes som en bruddparameter, og at denne parameteren også burde være gyldig under omfattende plastisering. Parameteren har fått betegnelsen CTOD (eng.: Crack Tip Opening Displacement) med δ som vanlig brukt symbol. Vi antar at brudd inntreffer ved en kritisk CTOD-verdi; δ_c . Bruddkriteriet blir følgelig:

$$\delta \geq \delta_c$$



Innen olje- og gassnæringen i Europa fikk CTOD-konseptet sitt gjennombrudd mot slutten av 1970-tallet. Bruddmekanikken var fremdeles ikke særlig anerkjent i industrien, men mange forkjempere mente at CTOD var en såpass intuitivt forståelig parameter at ikke-eksperter på bruddmekanikk ville kunne adoptere konseptet.



Wells' tilnærming:

Wells var først ute med å lage et uttrykk for å beregne CTOD under begrenset flytning, altså LEFM med hensyntagen til flytesonen. Han så på forskyvningene av sprekkeflatene nær sprekkespissen (se kap. 2):

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

Han antok at avrundingen av sprekkespissen gjorde at sprekkespissen ble forlenget halvveis inn i den plastiske sonen, altså $r=r_p=r_p/2$. Med $\theta=\pi/2$ får vi forskyvningene i y-retning som:

$$u_y = \frac{\kappa+1}{2\mu} K_I \sqrt{\frac{r_y}{2\pi}} = \frac{4}{E'} K_I \sqrt{\frac{r_y}{2\pi}}$$

Fra Irwins korleksjon for den plastiske sonen har vi:

$$r_y = \frac{r_p}{2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2$$

som gir:

$$\delta = 2u_y = \frac{4K_I^2}{\pi E' \sigma_{YS}}$$

Strip-Yield-modellen:

Et alternativ er basert på Dugdales strip-yield-modell. Følgende uttrykk for CTOD er utledet i appendiks til kapittel 3 i T-L. Anderson:

$$\delta = \frac{8\sigma_{YS}a}{\pi E} \ln \sec\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_{YS}}\right)$$

NB: $\sec(x)=1/\cos(x)$.

Ved hjelp av rekkeekspansjon av "ln sec"-termen og antagelse om at $\sigma \ll \sigma_{YS}$ for begrenset flytning kan det vises at dette uttrykket blir som følger for LEFM:

$$\delta = \frac{K_I^2}{E\sigma_{YS}}$$

Strip-yield-modellen gjelder for plan spenning. For å gjøre denne sammenhengen mellom CTOD og K_I mer allmenngyldig innføres parameteren m og E erstattes av E' :

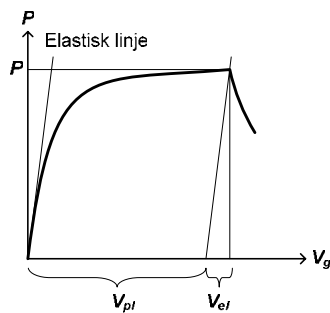
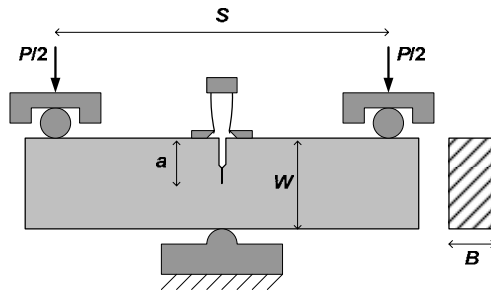
$$\delta = \frac{K_I^2}{mE'\sigma_{YS}}$$

hvor $m=1.0$ for plan spenning og $m=2$ for plan tøyning.

Hengsel-modellen

Strip-yield-modellen gir oss et verktøy for å beregne sprekkåpningen CTOD i en konstruksjon som funksjon av belastning. Vi trenger også en metode for å måle CTOD. Til dette er hengsel-modellen blitt nærmest enerådende.

Figuren under viser den mest brukte CTOD-prøven – en tre-punkts bøyeprobe med kantsprekk. (Ofte angitt som en SENB-prøve (Single Edge Notch Bend) eller en SE(B)-prøve.) Den har en sprekk hvor ytterste del først blir maskinert og innerste del blir til ved å utmatte prøven. Vanligvis er $a = W/2$. Ved sprekk-munnen er det montert en klypemåler for å måle forskyvningen V_g som funksjon av belastning. (Vi måler altså ikke forskyvningen Δ ved lastpunktene.) Klypemåleren kan være montert med på "kniver" som er limt eller skrudd til prøven.



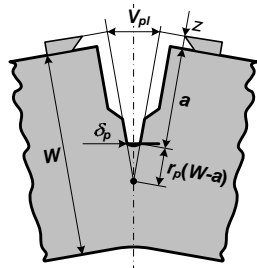
Under pålastningen vil de to halvdelene av prøven rotere i motsatt retning. Vi tenker oss at deformasjonene er konsentrert til netto-ligamentet mellom sprekken og motsatt overflate, mens resten av halvdelene roterer som stive legemer. Rotasjonen vil da skje om et tenkt rotasjonspunkt som et "hengsel".

Denne modellen er mest tilforlategelig om materialet er rent plastisk. Man har derfor valgt å se på deformasjonene som summen av en elastisk (lineær) del og en plastisk del:

$$V_g = V_e + V_p$$

og at CTOD-verdien ved ethvert punkt på last-forskyvnings-kurven er en sum av en respektiv elastisk CTOD og respektiv plastisk CTOD.

$$\delta = \delta_e + \delta_p$$



Den elastiske CTOD-verdien kan ve beregne direkte fra lasten ved hjelp av LEFM (plan tøyning):

$$\delta_{el} = \frac{K_I^2}{mE' \sigma_{YS}}$$

Den plastiske delen kan avledes rent geometrisk (se fig) ut fra trekant-betraktningen:

$$\frac{\delta_p}{r_p(W-a)} = \frac{V_p}{a + r_p(W-a) + z}$$

hvor r_p er en faktor som angir rotasjonspunktets beliggenhet i forhold til netto-ligamentet ($W-a$). Empiriske studier har vist at $r_p \approx 0.4$. z er høyden fra sprekkmunnen til målepunktet for kypemåleren.

Løst for den plastiske CTOD får vi da:

$$\delta_p = \frac{r_p(W-a)}{r_p(W-a) + a + z} V_p$$

og den totale CTOD-verdien:

$$\delta = \frac{K_I^2}{mE' \sigma_{YS}} + \frac{r_p(W-a)}{r_p(W-a) + a + z} V_p$$

som ved brudd betegnes δ_c .

J-integralet (Kap. 3.2)

J -integralet, som også blir betegnet Rice-integralet etter opphavsmannen, er en bruddmekanisk parameter som benyttes i like stor grad som CTOD. CTOD-konseptet er vel innarbeidet i industrien, men blir kritisert fra akademisk hold for å være dårlig teoretisk fundamentert. J -integralet er teoretisk veldefinert, men led tidligere manglende praktisk beregnings-metodikk.

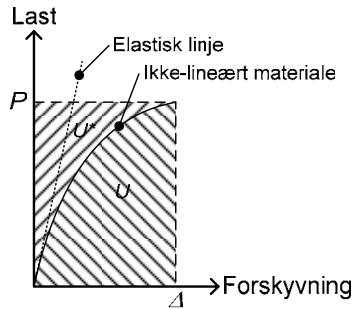
Vi kan betrakte J på to måter:

- Karakterisering av spennings-tøyningstilstanden nær sprekkspissen (som K_I for LEFM)
- Energy Release Rate for ikke-lineære materialer (som G for LEFM)

Rice bidro først til den første betraktingsmåten, og viste senere at også den siste er gyldig. Vi skal først se på siste.

J som Ikke-lineær Energy Release Rate:

Definisjonen av J som energy release rate for EPFM er helt parallell med definisjonen av G for LEFM. Forskjellen er at for EPFM vil last-forskyvningkurvene ikke lenger være rette linjer. Vi definerer J som:



$$J = - \frac{d\Pi}{dA}$$

J betegnes som "den drivende kraft" for brudd, og bruddkriteriet blir nå:

$$J \geq J_c$$

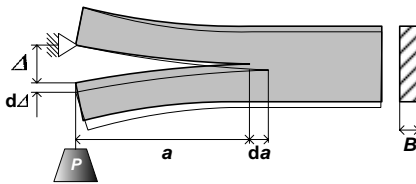
hvor J_c er materials bruddseighet.

Den potensielle energien Π består av to typer; tøyningsenergi U og arbeid utført av ytre laster F . Altså:

$$\Pi = U - F$$

Som før for G skal vi nå videreutvikle dette til en definisjon av J for lastkontroll og en for forskyvningskontroll og deretter anskueliggjøre at disse må være ekvivalente.

Lastkontroll:



Den potensielle tøyningsenergien ved lasten P må tilsvare den tilførte energien under pålastningen:

$$U = \int_0^{\Delta} P d\Delta$$

Ved konstant last er arbeidet ("last \times vei"):

$$F = P\Delta$$

Av figuren på forrige lysbilde ser vi at

$$P\Delta = U + U^*$$

som impliserer at

$$\Pi = U - P\Delta = -U^*$$

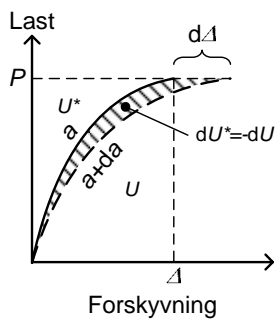
hvor

$$U^* = \int_0^P \Delta dP$$

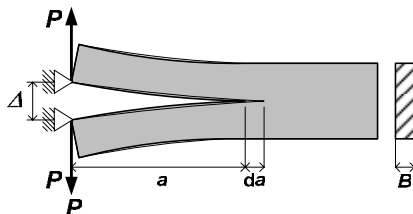
J kan da uttrykkes som

$$J = \left(\frac{dU^*}{dA} \right)_P = \frac{1}{B} \left(\frac{dU^*}{da} \right)_P = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial}{\partial a} \int_0^P \Delta dP \right)_P$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{B} \int_0^P \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a} \right)_P dP$$



Forskyvningskontroll:



Den potensielle tøyingsenergien ved lasten P er fortsatt:

$$U = \int_0^{\Delta} P d\Delta$$

Ved konstant forskyvning blir "last \times vei" null, altså:

$$F = 0$$

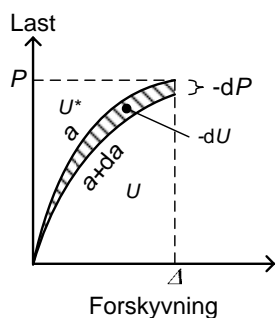
som impliserer at

$$\Pi = U$$

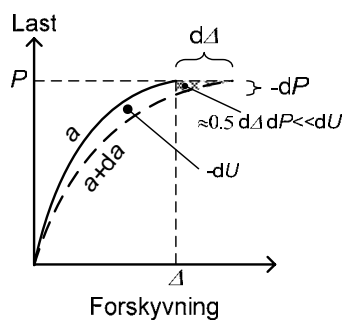
J kan da uttrykkes som

$$J = -\left(\frac{dU}{dA}\right)_A = -\frac{1}{B}\left(\frac{dU}{da}\right)_A = -\frac{1}{B}\left(\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{\Delta} P d\Delta\right)_A$$

$$\Rightarrow J = -\frac{1}{B}\int_0^{\Delta}\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)_A d\Delta$$



Sammenligning last- og forskyvningskontroll:



Vi nøyer oss her med å observere grafisk at differansen mellom dU^* for lastkontroll og $-dU$ for forskyvningskontroll er, som antydnet med skravert felt på figuren til venstre, en tilnærmet trekant med areal $\frac{1}{2} \times d\Delta \times dP$. Et produkt av to infinitesimale størrelser er neglisjerbart i forhold til en enkelt infinitesimal størrelse. Følgelig er:

$$\frac{1}{2} \times d\Delta \times dP \ll dU$$

Vi konkluderer derfor at uttrykkene for J under henholdsvis last- og forskyvningskontroll er identiske.

Kommentar:

I utledningen over er det antatt at den potensielle tøyingsenergien U er gitt av integralet under last-forskyvnings-kurven, m.a.o. at den all denne energien vil kunne frigjøres ved sprekkevekst. Dette er imidlertid ikke helt korrekt fordi et virkelig materiale ved avlastning vil følge en lineær avlastningskurve ig derfor frigjøre mindre energi. Vi velger derfor å betrakte J som en gyldig parameter for et tenkt ikke-lineært elastisk materiale, m.a.o. at samme kurve følges ved avlastning som ved pålastning. For virkelige materialer vil J kun være gyldig så lenge avlastning ikke finner sted. (Materialet "vet ikke" da om det er lineært eller ikke-lineært ved avlastning.)

Dette medfører også at J er ugyldig dersom sprekken vokser. Foran en voksende sprekke spiss plastiseres et volum av materialet. Etter at sprekken har vokst gjennom det samme volumet er det blitt avlastet.

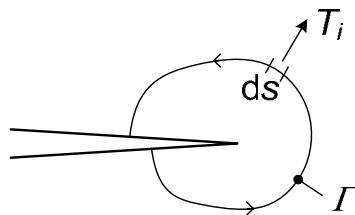
Vi har altså to begrensinger knyttet til J-integralet:

- J -integralet er ugyldig dersom avlastning finner sted
- J -integralet er ugyldig dersom sprekken vokser

J som det vei-uavhengige linjeintegralet

Definisjonen av J som energy release rate er en global betraktning. Rice betraktet også forholdene lokalt ved sprekke spissen. Han postulerte et linjeintegral gitt som

$$J = \int_{\Gamma} \left(w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right)$$



der Γ er konturen til linjen og:

w = tøyingsenergi-tettheten i et punkt på Γ

T_i = spenningsvektor normalt på Γ

u_i = forskyvningsvektor

s = distanse langs Γ

Tøyingsenergi-tettheten er definert som

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

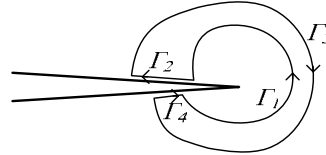
og spenningsvektoren som

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

der n_j er enhetsvektoren normalt på Γ .

Fra appendiks (ikke pensum):

Rice viste først at linjeintegralet blir lik null dersom Γ er en tilfeldig lagt sluttet sløyfe i et spennings-tøyningsfelt. Vi kan da velge å legge Γ som på figuren til høyre hvor den et stykke følger inntil hver av sprekkflatene. Dette gir oss fire deler av Γ som vi nummerer 1 til 4.



De respektive linjeintegralene for hver av delene angis tilsvarende J_1 til J_4 . Altså har vi:

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0$$

Da sprekkflatene (egentlig) begge er parallelle med x-aksen har vi $dy=0$ langs Γ_2 og Γ_4 . Videre kan vi ikke ha spenninger normalt på en overflate, så $T_r=0$ langs Γ_2 og Γ_4 . Ergo:

$$J_2 = J_4 = 0 \Rightarrow J_1 = -J_3$$

Hvis vi omdefinierer retningen for Γ_3 slik at både Γ_2 og Γ_3 peker samme vei (mot klokken) kan vi skrive

$$J_1 = J_3$$

Vi har følgelig vist at linje integralet er vei uavhengig. Dette betyr at J (i likhet med K_I for LEFM) karakteriserer spennings-tøynings-tilstanden ved sprekkspissen.

Rice viste også at J er lik den globale definisjonen som energy release rate.

J som "spenningsintensitetsfaktor" (HRR-feltet)

Linjeintegralet til Rice kan ved første blick virke "kryptisk" og lite anvendelig. Hutchinson, Rice og Rosengren tok ett skritt videre ved å beskrive spenning-tøynings-feltet foran sprekkspissen som funksjon av J (mer på en måte som K_I gjør i LEFM). For å gjøre dette trengte de en matematisk formulering av materialets spenning-tøyningskurve. De valgte å benytte den etablerte *Ramberg-Osgood*-ligningen:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n$$

hvor

σ_0 = et tilfeldig valgt referansepunkt på spenning-tøyningskurven. (Ofte benyttes materialets flytegrense σ_{YS})

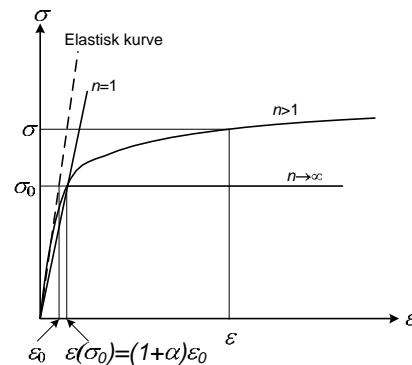
ε_0 = tilhørende tøyning på den elastiske kurven, dvs. σ_0/E .

α = dimensjonsløs konstant

n = fastningseksponenten

Nær sprekkspissen vil det plastiske leddet i Ramberg-Osgood-ligningen dominere slik at

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n$$



Hutchinson, Rice og Rosengren viste at dersom linjeintegralets vei-uavhengigheten skulle beholdes måtte man ha at produktet av spenning og tøyning måtte være proporsjonalt med avstanden fra sprekkspissen r .

$$\sigma_{ij} \times \varepsilon_{ij} \sim \frac{1}{r}$$

Dette kan oppnås med følgende uttrykk for spenning og tøyning:

$$\sigma_{ij} = k_1 \left(\frac{J}{r} \right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad \varepsilon_{ij} = k_2 \left(\frac{J}{r} \right)^{\frac{n}{n+1}}$$

hvor k_1 og k_2 er proporsjonalitetskonstanter. Vi ser at dette også er forenlig med LEFM hvor $\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}/E$:

$$\sigma_{ij} \frac{\sigma_{ij}}{E} = k_1 k_2 \left(\frac{J}{r} \right)^{\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}} \Rightarrow \sigma_{ij} \sim \sqrt{\frac{J}{r}}$$

De utførlige uttrykkene for σ_{ij} og ε_{ij} er

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{EJ}{\alpha \sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(n, \theta), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\alpha \sigma_0}{E} \left(\frac{EJ}{\alpha \sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(n, \theta)$$

hvor I_n er en integrasjonskonstant avhengig av n . $\tilde{\sigma}(n, \theta)$ og $\tilde{\varepsilon}(n, \theta)$ er dimensjonsløse geometriske funksjoner av n og vinkelen θ ut fra sprekkspissen.

EPRI-metoden (Foregripelse av kapittel 9)

Uttrykkene for HRR-feltet har fått betydning for videreutvikling av modeller for å beregne J fra ytre belastninger. Dette er beskrevet i kapittel 9, men vi kan for gripe begivenhetene ved å antydde dette allerede her:

Uttrykket for σ_{ij} kan løses for J som (sett $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$)

$$J = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r \left(\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} \right)^{n+1} \tilde{\sigma}^{-(n+1)}(n, \theta)$$

Dette uttrykket må dimensjonmessig være i overensstemmelse med det uttrykket vi vil frem. Vi antar at lokale spenninger må være proporsjonale med ytre last P , og setter

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} = \frac{P}{P_0}$$

der P_0 er en referanselast. Vi kan postulere at σ_0 er lik flytegrensen σ_{yS} . P_0 tolkes da som lasten som gir gjennomgående flytning, dvs. $\sigma = \sigma_{yS}$ gjennom hele tverrsnittet.

Videre velger vi å erstatte de dimensjonsløse parametrene som er funksjon av n i en ny parameter h og erstatter r med en fritt valgt karakteristisk lengde L .

$$J = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 h L \left(\frac{P}{P_0} \right)^{n+1}$$

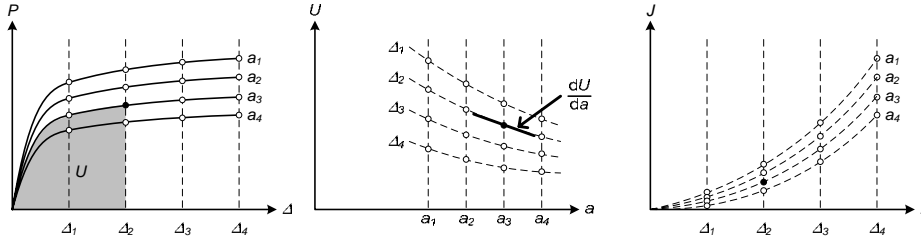
Dette uttrykket kalles EPRI-metoden etter opphavet Electric Power Research Institute i USA. Når man for en gitt problemstilling har definert P_0 og tilordnet L en fysisk parameter (f.eks. sprekk lengden eller restligamentet) kan man med FE-beregninger bestemme h som funksjon av sprekkstørrelse og n . EPRI utgav en håndbok med slike uttrykk, som delvis er gjengitt i appendiks til kapittel 9.

Måling av J ved laboratorieprøving

I begynnelsen var det vanskelig å måle J . Man tenkte seg å utføre tester som gav input til definisjonen av J som energy release rate for forskyvningskontroll:

$$J = -\frac{1}{B} \left(\frac{dU}{da} \right)_\Delta$$

Ved å utføre en tester på en serie av prøver med litt ulik sprekklengde kunne man måle P mot Δ og viderebehandle dette som vist på følgende prinsippsskisser:



Dette er imidlertid særdeles upraktisk. Det krever et stort antall prøver. Man ønsker å måle J ved brudd, men er avhengig av at man ikke får brudd i området man plottes J - Δ . Naturlig spredning i datagrunnlaget gir store usikkerheter i å bestemme dU/da .

En mer praktisk metode som i dag er vanlig standard er foreslått av Rice et.al. Her velger vi å dele opp deformasjonen i en elastisk del og en plastisk del:

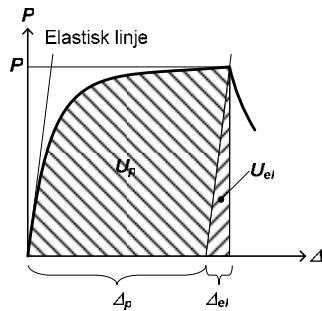
$$\Delta = \Delta_{el} + \Delta_p$$

Fra definisjonen av J som energy release rate under lastkontroll har vi

$$J = \frac{1}{B} \int_0^P \left(\frac{d\Delta}{da} \right)_p dP = \frac{1}{B} \int_0^P \left[\left(\frac{d\Delta_{el}}{da} \right)_\Delta + \left(\frac{d\Delta_p}{da} \right)_\Delta \right] dP = J_{el} + J_p$$

hvor vi heller velger å representere J_{el} med relasjonen til K_I for LEFM:

$$J_{el} = \frac{K_I^2}{E'}$$



Vi kan da konsentrere oss om å bestemme den plastiske delen

$$J_p = \frac{1}{B} \int_0^P \left(\frac{d\Delta_p}{da} \right)_\Delta dP$$

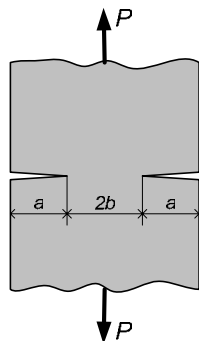
Rice et.al. viste for en rekke geometrier at J_p at denne kan bestemmes enklere som en andel av den tilførte plastiske energien under pålastning, U_p :

$$J_p = \frac{\eta_p U_p}{Bb}$$

der η_p er en geometriavhengig dimensjonsløs konstant og b er ligamentet ($W-a$).

La oss se på ett eksempel; en plate med dobbel kantsprekk hvor sprekkarealet er

$$A = 2Ba$$



Vi skriver da J_p som (legg merke til 2-tallet)

$$J_p = \int_0^P \left(\frac{d\Delta_p}{dA} \right)_p dP = \frac{1}{2B} \int_0^P \left(\frac{d\Delta_p}{da} \right)_p dP = -\frac{1}{2B} \int_0^P \left(\frac{d\Delta_p}{db} \right)_p dP$$

Vi antar så at sprekken er tilstrekkelig lang til at all plastisk deformasjon er begrenset til ligamentet $2b$. Dermed blir de eneste variable parametere av relevans for forskyvningen Δ_p lasten P og lengden b . Vi antar derfor at forskyvningen kan formuleres som

$$\Delta_p = bH\left(\frac{P}{Bb}\right)$$

hvor H er en foreløpig ukjent dimensjonsløs funksjon av den dimensjonsløse lasten $P/(Bb)$. Derivasjon under lastkontroll gir

$$\left(\frac{d\Delta_p}{db} \right)_p = H\left(\frac{P}{Bb}\right) + bH'\left(\frac{P}{Bb}\right)\left(-\frac{P}{Bb^2}\right) = \frac{\Delta_p}{b} - H'\left(\frac{P}{Bb}\right)\frac{P}{Bb}$$

Vi kan også derivere uttrykket for Δ_p ved konstant ligament b :

$$\left(\frac{d\Delta_p}{dP} \right)_b = bH'\left(\frac{P}{Bb}\right)\frac{1}{Bb} = \frac{1}{B}H'\left(\frac{P}{Bb}\right) \Rightarrow H'\left(\frac{P}{Bb}\right) = B\left(\frac{d\Delta_p}{dP}\right)_b$$

som innsatt i uttrykket over gir

$$\left(\frac{d\Delta_p}{db} \right)_p = \frac{\Delta_p}{b} - B\left(\frac{d\Delta_p}{dP}\right)_b \frac{P}{Bb} = \frac{1}{b} \left[\Delta_p - P\left(\frac{d\Delta_p}{dP}\right)_b \right]$$

$$J_p = -\frac{1}{2Bb} \int_0^P \left[\Delta_p - P\left(\frac{d\Delta_p}{dP}\right)_b \right] dP = -\frac{1}{2Bb} \left[\int_0^P \Delta_p dP - \int_0^P P d\Delta_p \right]$$

Vi ser av figuren på forrige side at de to integralene er komplementære til $P\Delta_p$. Altså:

$$J_p = -\frac{1}{2Bb} \left[\left(P\Delta_p - \int_0^{\Delta_p} P d\Delta_p \right) - \int_0^{\Delta_p} P d\Delta_p \right] = \frac{1}{2Bb} \left[2 \int_0^{\Delta_p} P d\Delta_p - P\Delta_p \right] = \frac{1}{2Bb} [2U_p - P\Delta_p]$$

Hvis vi videre antar at materialet er nært idealplastisk vil vi ha at $U_p \approx P\Delta_p$. Vi får da:

$$J_p = \frac{0.5U_p}{Bb}$$

Sammenheng mellom J og CTOD

Vi har tidligere sett at strip yield-modellen gir en sammenheng mellom K_I og CTOD for LEFM som

$$\delta = \frac{K_I^2}{mE'\sigma_{YS}}$$

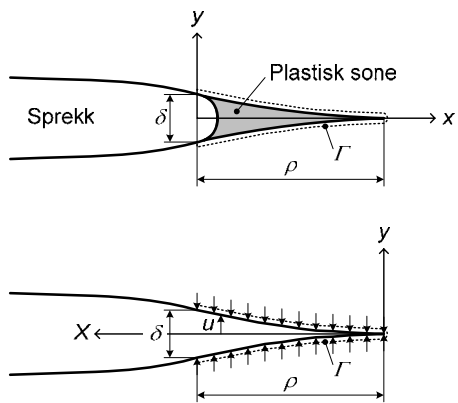
Vi kjenner også sammenhengen mellom G og K_I . Da $J=G$ for LEFM har vi følgende:

$$J = \frac{K_I^2}{E'}$$

Kombinasjon av disse gir da:

$$J = m\sigma_{YS}\delta$$

Vi skal her vise at dette uttrykket også er gyldig for EPFM ved å anvende Rice' linjeintegral på en strip yield-modell. Merk at strip yield-modellen gjelder for plan spenning ($m=1$).



Figuren til venstre viser den plastiske sonen som et bånd med lengde $\rho \gg \delta$ (dvs som et "bånd" hvor tykkelsen er overdrevet på figuren). Linjen for Rice-integralet, Γ , kan legges tilfeldig. Vi velger å legge den tett inntil grensen til den plastiske sonen.

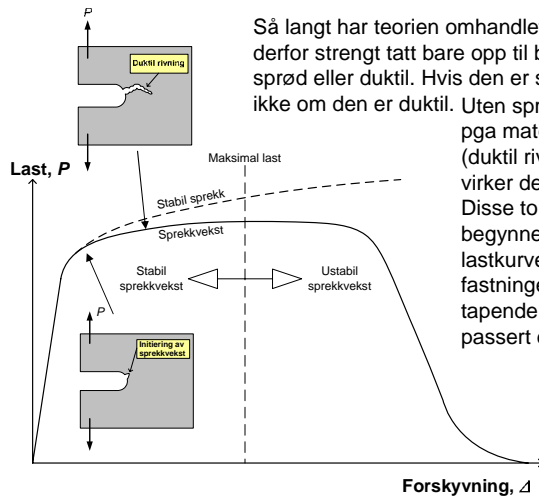
Da $\rho \gg \delta$ har vi $dy=0$ langs Γ . Videre er spenningene normalt på Γ rettet i y -retningen og må være lik flytegrensen, dvs. $T_i = \sigma_{YS}$. Linjeintegralet reduseres da til

$$J = \int_{\Gamma} \left(w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) = -\sigma_{YS} \int_{\Gamma} \frac{\partial u_y}{\partial x} ds$$

Den andre figuren viser samme situasjon, men vi har valgt et nytt koordinatsystem slik at $X=\rho-x$ og $dx=-dX$. La oss benytte symmetrien om X -aksen; begrens integrasjonen til oversiden av sprekken fra $X=0$ til $X=\rho$ og gange med 2. Vi har da at $s=X$ og $ds=dX$. Da får vi:

$$J = -2\sigma_{YS} \int_0^{\rho} \frac{\partial u_y(X)}{(-\partial X)} dX = 2\sigma_{YS} \int_0^{\delta/2} \partial u_y(X) = \sigma_{YS}\delta$$

Sprekkvekst-kurver (Kap. 3.4)



Så langt har teorien omhandlet stasjonære sprekker. Den gjelder derfor strengt tatt bare opp til begynnende sprekkvekst, enten den sprø eller duktil. Hvis den er sprø er som regel "løpet kjørt". Men ikke om den er duktil. Uten sprekkvekst ville lastkapasiteten ha økt pga materialets fastning. Sprekkveksten (duktil rivning) reduserer tverrsnitts-arealet og virker dermed negativt inn på lastkapasiteten. Disse to mekanismene konkurrerer. Til å begynne med vil fastningen være sterkest og lastkurven fortsetter å være stigende. Men fastningen avtar, og på et tidspunkt blir den tapende i forhold til sprekkveksten. Vi har da passert et maksimalpunkt for lasten.

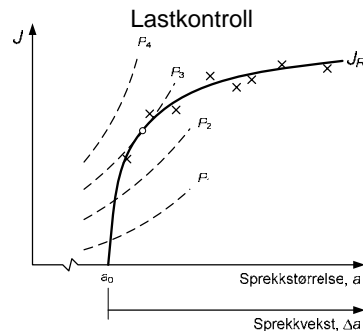
Deretter vokser sprekken under avtagende last, og er derfor ustabil. Under lastkontroll er brudd dermed unngåelig.

Man tenker seg at sprekkveksten, Δa , må være en funksjon av J . Sammenhengen $J-\Delta a$ kalles ofte "J-R-kurver" og er materialavhengig. J-R-kurven for et materiale fremskaffes ved bruddmekanisk prøving hvor man i tillegg til å måle lastforflytning måler sprekkveksten, Δa . J-verdien betegnes J_R (R for "Resistance") og betraktes som materialets sprekkvekstmotstand ved Δa . DVS at for en gitt last P og sprekkklengde $a=a_0+\Delta a$, hvor a_0 er opprinnelig sprekkklengde, vil fortsatt sprekkvekst finne sted om

$$J(P, a) \geq J_R(\Delta a)$$

Analysen under lastkontroll:

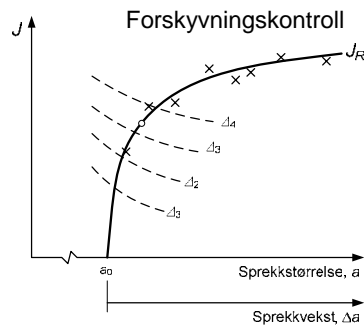
For en komponent med sprekk kan vi bruke J-R-kurven til å beregne hvor stor last P som kan tillates for en gitt opprinnelig sprekkstørrelse a_0 . De stiplede linjene i figuren viser beregnede verdier for pålagt J som funksjon av a ved gitte laster. For P_1 og P_2 vokser sprekken små verdier av a , men ikke for store. Lasten er derfor underkritisk og sprekkveksten er stabil. For P_4 vokser sprekken for alle verdier av a og er derfor overkritisk. Den kritiske lasten finner vi når kurven for pålagt J tangerer kurven for J_R .



Analysen under forskyvningskontroll:

Resonnementet over gjelder konstante laster, altså lastkontroll. Under lastkontroll vil pålagt J øke med tiltagende sprekkvekst. Men under forskyvningskontroll, altså konstant Δ , vil sprekkveksten redusere stivheten (øke kompliansen) og dermed redusere lasten. Følgelig vil J kunne avta med økende Δ . Som vist i figuren vil sprekkveksten dermed alltid være stabil.

Kommentar: Virkelige tilfeller vil alltid inkludere en viss grad av lastkontroll. Konservativ praksis vil derfor være å anta full lastkontroll.



Tearing modulus:

Vi ser at hellningene på J - R -kurven og hellning på kurven for pålagt J er av avgjørende betydning for om sprekkveksten er stabil eller ikke. "Tearing modulus" er en form for dimensjonsløs representasjon av disse hellningene. Vi definerer T_R som materialitets motstand og T_{app} som pålagt T eller den "drivende kraft":

$$T_R = \frac{E}{\sigma_0^2} \frac{dJ_R}{da} \quad T_{app} = \frac{E}{\sigma_0^2} \frac{dJ}{da}$$

hvor σ_0 er en karakteristisk spenning (f.eks. materialets flytegrense). Δ_T er total forskyving ved lastpunktet.

Uttrykksformen gir en mulighet til å evaluere dJ/da under gitte kombinasjoner av last- og forskyvningskontroll, og dermed inkludere den gunstige effekten av forskyvningskontroll.

Vi kan resonere fra kurvene over at betingelsene for stabil sprekkvekst er:

$$J = J_R \quad \text{og} \quad T_{app} \leq T_R$$

Betingelsene for ustabil sprekkvekst er:

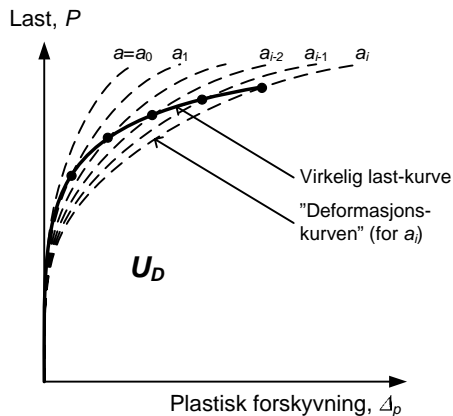
$$T_{app} > T_R$$

Beregning av J ved prøving med spekkvekst

Vi har tidligere sagt at J ikke er gyldig under sprekkvekst fordi det medfører avlastning av plastisk deformert materiale. Dette faktum neglisjeres ved spekkvekstanalyser.

Et annet fenomen vi bør ta hensyn til er hvordan J beregnes ved prøving når sprekkvekst har funnet sted. For en stasjonær sprekk har vi

$$J = J_{el} + J_p = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{\eta_p U_p}{Bb}, \quad U_p = \int_0^{\Delta_p} P d\Delta_p$$



Problemet knytter seg til at formelen gjeødeer en stasjonær sprekk. Den virkelige last-kurven, som vi observerer ved testing, følger i begynnelsen kurven for en stasjonær sprekk med $a=a_0$. Når sprekken vokser til $a=a_1$ krysser den kurven for en stasjonær sprekk av lengde a_1 osv. Ved beregning av U_p når $a=a_i$ skulle vi ha benyttet kurven for en stasjonær sprekk med lengde a_i , kalt "deformasjonskurven". Arealet under deformasjonskurven betegnes U_D . Hvordan dette tas hensyn til i praksis er utledet i T.L. Anderson kap. 7.4.2.

"Crack Tip Constraint" (innspenning) (Kap. 3.6)

Treksialitet ved sprekkspissen ble diskutert i kap. 2 for LEFM. Dette fenomenet er viet betydelig oppmerksomhet de senere årene. Økt treksialitet påvirker materialets oppførsel i retning av både redusert motstand mot sprøbrudd og redusert motstand mot duktil sprekkvekst.

Tradisjonelt har materialenes bruddmekaniske egenskaper blitt målt med prøver som ut fra geometri belastningsmåte gir bortimot maksimal treksialitet. Dette er konservativt, men forskningen har hatt som mål å *redusere* konservativiteten knyttet til bruddmekaniske analyser. Det har derfor vært viktig å komme frem til gode metoder for å inkludere effekten av treksialitet i ingeniørmessige analyser.

Dette er blitt gjort etter to strategier:

- 1) Modifisere geometri og belastningsmåte slik at treksialiteten blir nær opptil det praktiske tilfellet som skal analyseres
- 2) Inkludere teoretiske korreksjoner for treksialitet i beregningsanalysen.

Den første strategien har så langt vært enklest å gjennomføre på en troverdig måte.

Den elastiske T -spenning

For LEFM uttrykte Williams spenningen foran sprekkspissen ved en rekkeutvikling. Det første leddet, hvor K_I inngår, dominerer ved sprekkspissen da dette er proporsjonalt med $1/\sqrt{r}$. De høyere ordens leddene ble derfor neglisjert.

Nå viser det seg imidlertid at det 2. leddet, som er proporsjonalt med r^0 , altså uavhengig av avstanden, bidrar betydelig til å skape treaksialitet. Vi velger derfor å uttrykke spenningene nær sprekkspissen som:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \begin{bmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu T \end{bmatrix}$$

T er altså en uniform spenning i x -retningen som bidrar til en uniformspenning νT i z -retningen.

I likhet med K_I må T være proporsjonal med ytre last P under lineærelastiske forhold. Man definerer derfor "biaksialitetsforholdet" som

$$\beta = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K_I}$$

Ved full treaksialitet er $T=0$ og dermed $\beta=0$. Ved avtagende treaksialitet blir altså T og β negative.

T og β er avhengige av geometri og belastningsmåte. En enakset uniformt belastet uendelig plate med gjennomgående sentersprekk har $\beta=-1$. Det betyr at T -spenningen for denne geometrien bidrar sterkt til å redusere treaksialiteten.

For andre geometrier blir treaksialiteten redusert i mindre grad, og er normalt også avhengig av sprekkstørrelsen.

T eller β kan generelt bestemmes ved hjelp av FE-analyse, men det gjøres også en innsats for å utvikle kompendier over β for en rekke geometriske konfigurasjoner. Denne kunnskapen kan utnyttes til å velge prøvegeometrier med β tilsvarende den virkelige situasjonen, og dermed oppnå realistiske bruddseighetsdata.

T -spenningen er i teorien begrenset til LEFM. Når den likevel nevnes under kapittelet for EPFM er det fordi konseptet viser empirisk seg å gjelde ganske godt også for EPFM.

J-Q-teori

J-Q-teori bringer oss inn i teori for treaksialitet under EPFM. Vi antar at spennings-tøyings-feltet nær sprekkspissen gitt av HRR-feltet under full treaksialitet. I tillegg får et avvik fra HRR-feltet, kalt "difference-field":

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_{\text{HRR}} + (\sigma_{ij})_{\text{Diff}}$$

En litt annerledes formulering som benyttes er basert på å relatere avviket i forhold til spenningsfeltet for når $T=0$:

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_{T=0} + (\sigma_{ij})_{\text{Diff}}$$

O'Dowd og Shih definerte parameteren Q som styrken til $(\sigma_{ij})_{\text{Diff}}$. En praktisk definisjon på Q som vanligvis anvendes er:

$$Q = \frac{\sigma_{yy} - (\sigma_{yy})_{T=0}}{\sigma_0} \quad \text{ved} \quad \frac{r\sigma_0}{J} = 2$$

Vi ser her at Q -verdien "tas ut" basert på spenningene normalt sprekkplanet ved en gitt normert avstand r fra sprekkspissen. Dette er en praktisk erfarings-regel som skal sørge for konsistent anvendelse når Q bestemmes med FE-analyse.

Praktisk anvendelse av Q kan baseres på den såkalte J - Q -lokusen. La oss betegne kritisk J for brudd ved en gitt Q som J_c og den kritiske J ved full treaksialitet ($Q=0$) som J_0 .

Praktisk anvendelse av Q kan baseres på den såkalte J - Q -lokusen. La oss betegne kritisk J for brudd ved en gitt Q som J_c og den kritiske J ved full treaksialitet ($Q=0$) som J_0 . Videre antar vi at vi får brudd når spenningen $\sigma_{yy} = \sigma_f$ for de to situasjonene er identiske i et karakteristisk punkt foran sprekkspissen. Vi kan da bestemme forholdet σ_f/σ_0 ut fra HRR-feltet. Likhets ved brudd for $Q \neq 0$ og $Q=0$ gir da:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_0} = \left(\frac{EJ_c}{\alpha\sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{yy}(n, \theta) + Q = \left(\frac{EJ_0}{\alpha\sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{yy}(n, \theta)$$

$$\frac{J_c}{J_0} = \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_f} Q \right)^{n+1}$$

Dette viser at J_c er sterkt avhengig av Q . For et gitt materiale kan bestemmes (σ_f/σ_0) ved å utføre prøving med ulike prøvegeometrier med kjente verdier for Q . Dermed har man et verktøy for å ta Q -teorien inn i en bruddmekanisk analyse.

Kommentar: Det er utviklet mer moderne og praktisk metoder for å ta i bruk T og Q i bruddmekaniske analyser.