MEK 4520 Bruddmekanikk – Løsningsforslag til eksamensoppgaver høst 2005

Oppgave 1

Du har fått i oppgave å avgjøre hvor store defekter (sprekker) som kan aksepteres i en stor komponent av støpestål. Støpestål er vanligvis sprø.

a)
Hvilke karakterestiske trekk ved bruddflaten kjennetegner et sprøtt brudd?

Momenter:
- Lite deformasjon av prøven
- Overflatens makroskopiske utseende er grov og glinsende
- To typer: Transkrystallinsk (kløvning) og interkrystallinsk
- Transkrystallinsk brudd viser elvemønster i mikroskopet

b)
Du vil først bestemme materialets bruddseighet i form av kritisk K_I. Du benytter en standard tre-punkts bøyeprøve av følgende dimensjoner:

Bredde, B = 80 mm
Vidde, W = 80 mm
Sprekklengde, a = 40 mm
Spenn mellom lastpunktene: S = 320 mm

Materialets flytegrense er 450 MPa. Prøven viser et sprødbrudd ved lasten P=100 kN. Spenningsintensitetsfaktoren er for denne prøven er gitt av:

$$K_I = \frac{PS}{BW^{1.5}} f(a/W) \quad \text{hvor} \quad f(0.5) = 2.66$$

Hva blir materialets kritiske K_I ?
Vis om prøven er stor nok til at bruddseigheten kan betegnes som en gyldig K_{Ic}-verdi?

Tallene innsatt i formelen for K_I:

$$K_Q = \frac{100\,000 \cdot 320}{80 \cdot 80^{1.5}} 2.66 = \underline{\underline{1487 \text{ Nmm}^{-3/2}}}$$

Prøvens minste dimensjoner for å oppnå en gyldig K_{Ic} er gitt som

$$a, (W-a), B \geq 2.5\left(\frac{K}{\sigma_{YS}}\right)^2 = 2.5\left(\frac{1487}{450}\right)^2 = \underline{\underline{27{,}3 \text{ mm}}}$$

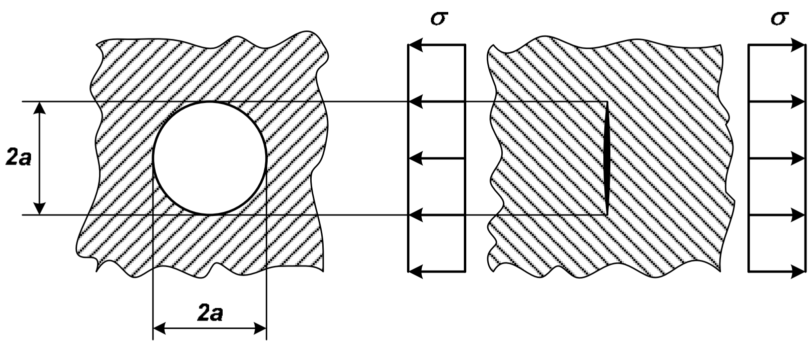
Da dette er oppfylt har vi en gyldig $\underline{\underline{K_{Ic} = 1487 \text{ Nmm}^{-3/2}}}$

c)

Anta at komponenten kan innholde sirkulære sprekker hvor avstanden til overflatene er stor i forhold til sprekkstørrelsen. Spenningen antas å være uniformt fordelt med største hovedspenning, σ = 210 MPa, rettet normalt på sprekkflaten. Spenningsintensitetsfaktoren er da gitt som

$$K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad , \quad Y = \frac{2}{\pi}$$

Beregn kritisk sprekkstørrelse for denne komponenten.



Uttrykket for K_I løst m.h.t. sprekkstørrelse:

$$a_c = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{Ic}}{Y\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1487}{\frac{2}{\pi}210}\right)^2 = 39.4 \text{ mm}$$

Den kritiske sprekkstørrelsen er $\underline{\underline{2a_c = 78.8 \text{ mm}}}$

(Kommentar: Dette er en meget stor sprekkstørrelse. Det skyldes at spenningen er forholdsvis lav. M.a.o. er det lite sannsynlig i dette eksempelet at det skal oppstå sprekker som overstiger den kritiske verdien.)

Oppgave 2

En konstruktør dimensjonerer en komponent som vanligvis lages i høyfast stål med bruddseighet G=80 N/mm. Han ser at han kan oppnå en lettere komponent ved å velge en titanlegering (ca. halve egenvekten) med samme flytegrense. Men E-modulen for titan er bare halvparten av for stål.

a)
Anta at geometri og last vil være identiske enten man velger stål eller titan. Hvilket krav til bruddseigheten G må du sette til titan-komponenten for at kritisk sprekkstørrelse skal være den samme som for stål? Benytt sammenhengen mellom G og K_I *for å vise dette!*

Sammenhengen mellom G og K_I er gitt som:

$$G = \frac{K_I}{E'}$$

Spenningen og geometrien er lik for begge tilfeller, dermed er også K_I like for begge tilfeller. Forholdet mellom G for titan og G for stål er da:

$$\frac{G_{titan}}{G_{stål}} = \frac{K_I / E'_{titan}}{K_I / E'_{stål}} = \frac{E_{stål}}{E_{titan}} = \frac{E_{stål}}{E_{stål}/2} = 2$$

Altså:

$$\underline{\underline{G_{titan} = 2\,G_{stål} = 2 \cdot 80 = 160 \text{ N/mm}}}$$

b)
Besvar samme spørsmål som i oppgave a), men nå med utgangspunkt i en av definisjonene av G:

$$G = -\frac{1}{B}\left(\frac{dU}{da}\right)_{\Delta} \quad \textit{eller} \quad G = \frac{1}{B}\left(\frac{dU}{da}\right)_{P}$$

Hint: For en gitt geometri er kompliansen C omvendt proporsjonal med materialets elastisitetsmodul E og forøvrig en ren funksjon av sprekkstørrelsen a.

Ved forskyvningskontroll har vi:

$$U = \frac{1}{2}P\Delta \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}\right)_{\Delta} = \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}a}\right)_{\Delta}$$

Fra definisjonen av komplians har vi:

$$C = \frac{\Delta}{P} \quad \Rightarrow \quad P = \Delta C^{-1} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}a}\right)_{\Delta} = -\Delta C^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}\right)_{\Delta} = -\frac{\Delta}{C^2}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}$$

(Indeks Δ unødvendig for dC/da fordi kompliansen er uavhengig av om vi har last- eller forskyvningskontroll.)
Innsatt i definisjonene for G under forskyvningskontroll:

$$G = -\frac{\Delta}{2B}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}a}\right)_{\Delta} = \frac{1}{2B}\frac{\Delta^2}{C^2}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a} = \frac{1}{2B}P^2\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}$$

C er omvendt proporsjonal med *E* og forøvrig en funksjon av *a*. Altså kan vi skrive:

$$C = \frac{1}{E}f(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a} = \frac{1}{E}f'(a)$$

som innsatt i uttrykket for *G* gir

$$G = \frac{1}{2BE}P^2 f'(a)$$

Ved samme geometri og last blir da forholdet mellom *G* for titan og *G* for stål

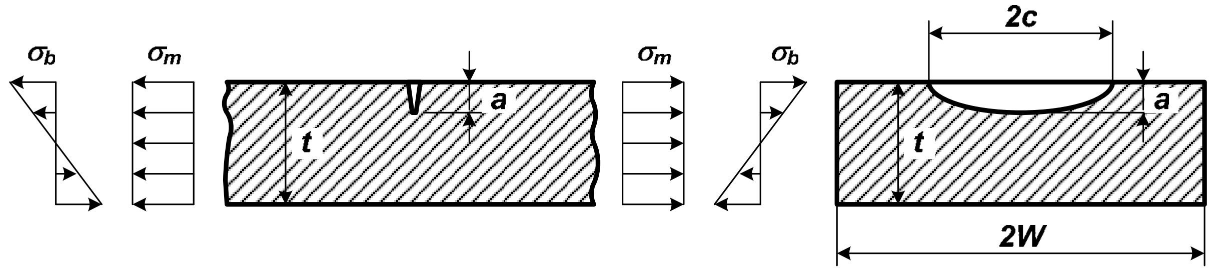
$$\frac{G_{titan}}{G_{stål}} = \frac{\frac{1}{2BE_{titan}}P^2 f'(a)}{\frac{1}{2BE_{stål}}P^2 f'(a)} = \frac{E_{stål}}{E_{titan}} = \frac{E_{stål}}{E_{stål}/2} = 2$$

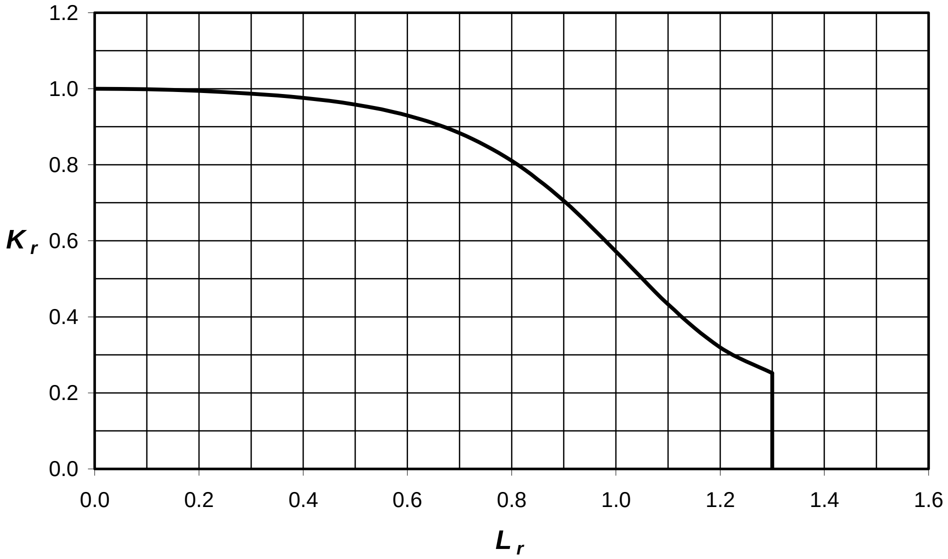
Altså:

$\underline{\underline{G_{titan} = 2\,G_{stål} = 2 \cdot 80 = 160 \text{ N/mm}}}$

Oppgave 3

I en platekonstruksjon (se figur) er det funnet en overflatesprekk og du skal benytte bruddvurderingsdiagrammet under til å konkludere om sprekken utgjør en fare for brudd.





Følgende data er oppgitt:

Platetykkelse:	*20 mm*	*Flytegrense:*	*360 N/mm^2*
Sprekkdybde:	*3 mm*	*Elastisitetsmodul:*	*210 000 N/mm^2*
Sprekklengde:	*20 mm*	*Tverrkontraksjonsfaktor:*	*0.3*
Platebredde:	*120 mm*	*Bruddseighet (J):*	*70 N/mm*

Membranspenning: *250 N/mm^2*
Bøyespenning: *75 N/mm^2*

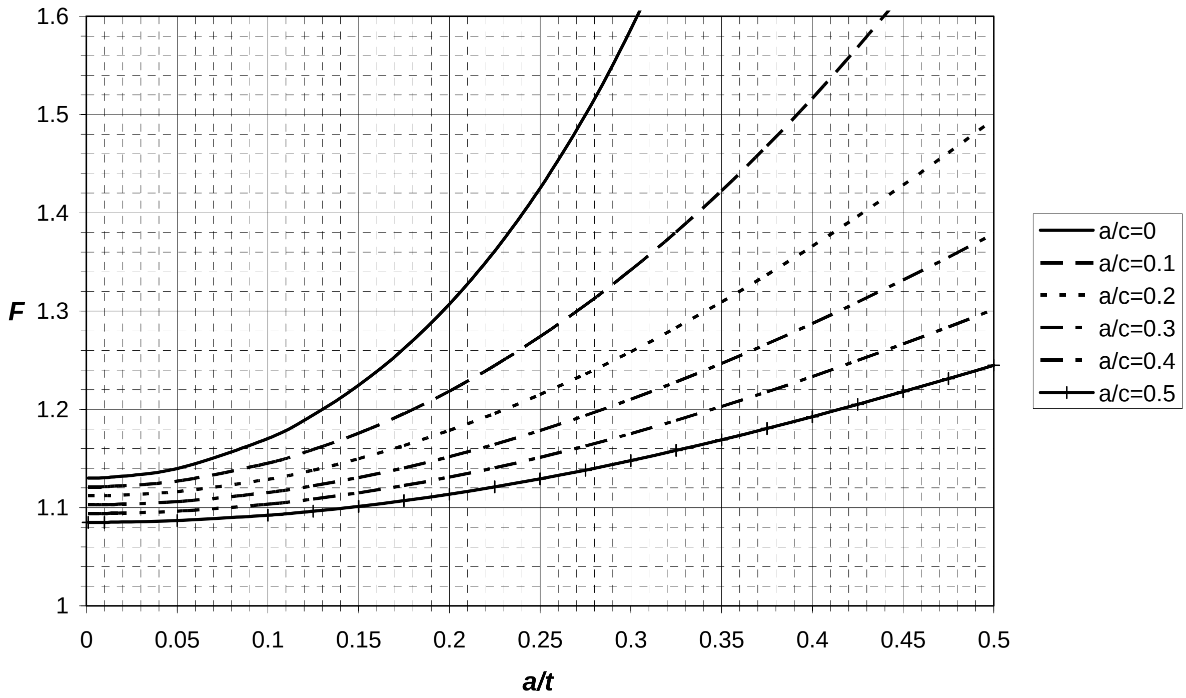
Uttrykket for spenningsintensitetsfaktoren er

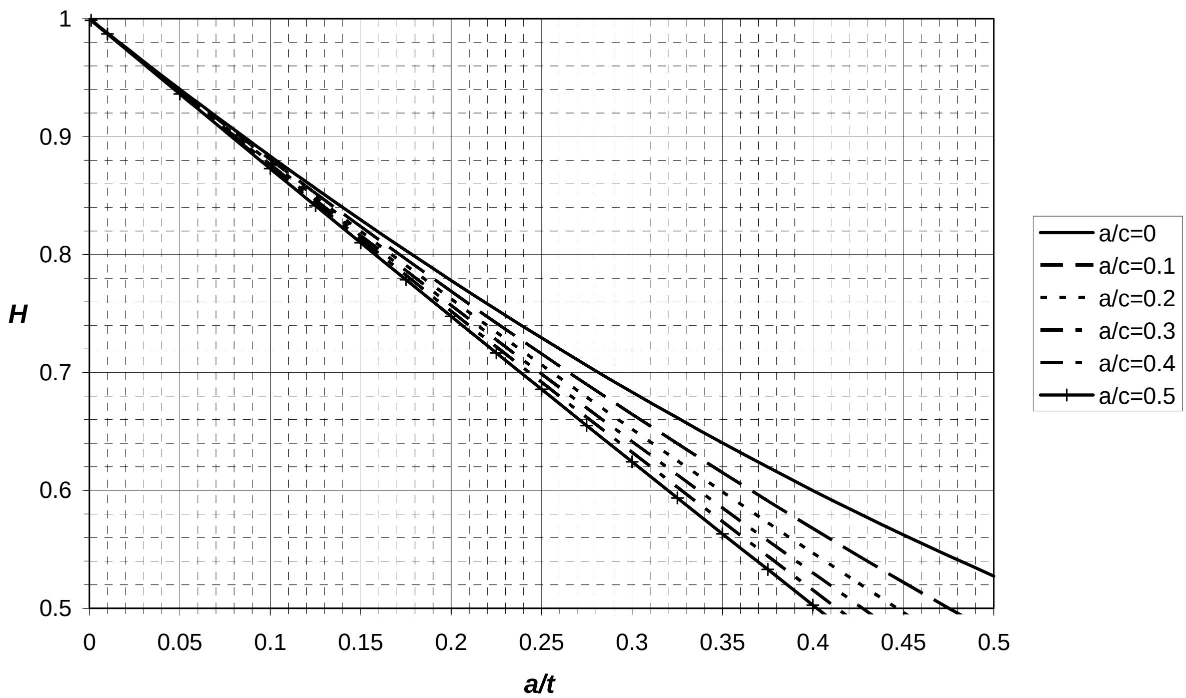
$$K_I = (\sigma_m + H\sigma_b)\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}\,F \quad , \quad Q = 1 + 1.464\left(\frac{a}{c}\right)^{1.65}$$

H og F kan du finne fra grafene under.

Benytt følgende formel for referansespenningen:

$$\sigma_{ref} = \frac{\sigma_b + \sqrt{\sigma_b^2 + [3\sigma_m(1-\alpha)]^2}}{3(1-\alpha)^2} \quad , \quad \alpha = \frac{a/t}{1+t/c}$$





Fra de oppgitte data har vi:

a/t = 3/20 = 0,15

a/c = 2/10 = 0,3 (NB: c er halve sprekklengden på 20 mm)

Grafene gir oss da:

F = 1,13

H = 0,82

Spenningsintensitetsfaktoren finnes da av oppgitt formel som:

$$Q = 1 + 1.464\left(\frac{a}{c}\right)^{1.65} = 1 + 1.464(0,3)^{1.65} = 1,2$$

$$K_I = (\sigma_m + H\sigma_b)\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}\,F = (250 + 0,82 \cdot 75)\sqrt{\frac{\pi \cdot 3}{1,2}}\,1,13 = \underline{986 \text{ Nmm}^{-3/2}}$$

Bruddseigheten uttrykt i K_{mat} er gitt av sammenhengen med J som

$$J = \frac{(1-\upsilon^2)K^2}{E} \quad \Rightarrow \quad K_{mat} = \sqrt{\frac{EJ_{mat}}{(1-\upsilon^2)}} = \sqrt{\frac{210\,000 \cdot 70}{(1-0,3^2)}} = \underline{4019 \text{ Nmm}^{-3/2}}$$

K_r er da gitt som:

$$K_r = \frac{K_I}{K_{mat}} = \frac{986}{4019} = \underline{\underline{0,25}}$$

Referansespenningen regnes fra oppgitt formel som:

$$\alpha = \frac{a/t}{1 + t/c} = \frac{3/20}{1 + 20/10} = 0,05 \quad \text{(NB: } c \text{ er halve sprekklengden)}$$

$$\sigma_{ref} = \frac{\sigma_b + \sqrt{\sigma_b^2 + [3\sigma_m(1-\alpha)]^2}}{3(1-\alpha)^2} = \frac{75 + \sqrt{75^2 + [3 \cdot 250(1-0,05)]^2}}{3(1-0,05)^2} = \underline{292,3 \text{ N/mm}^2}$$

L_r er da

$$L_r = \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_{YS}} \frac{292,3}{360} = \underline{\underline{0,81}}$$

Punktet (0,81, 0,25) ligger under FAD-kurven. Sprekken utgjør derfor ingen umiddelbar fare for brudd.