Kapittel 2
Lineær-elastisk bruddmekanikk

Forelesningsnotater i MEK 4520 Bruddmekanikk

Hans A. Bratfos

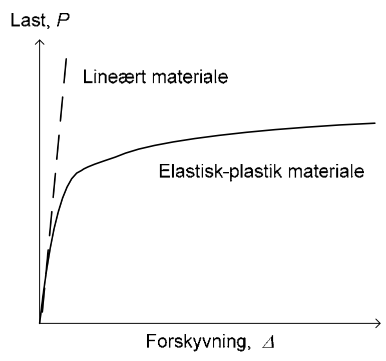
Lærebok: T.L. Anderson, Fracture Mechanics Fundamentals and Applications, 3rd edition.

Lineær-elastisk bruddmekanikk

I bruddmekanikken skilles det mellom
- Lineær-elastisk bruddmekanikk, forkortet **LEFM** ("Linear-Elastic Fracture Mechanics")
- Elastisk-plastisk bruddmekanikk, forkortet **EPFM** ("Elastic-Pastic Frature Mechanics)

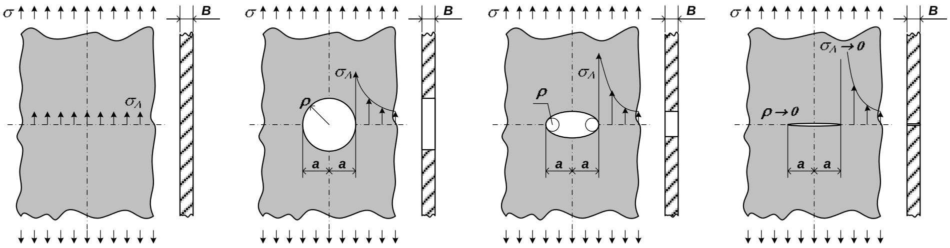
Dette kapittelet tar for seg LEFM. Som navnet tilsier er teorien for LEFM basert på at materialet oppfører seg lineært, altså har en spennings-tøyningskurve uten noen form for flytning. Slike materialer finnes ikke i praksis, men så lenge flytningen er begrenset til et ubetydelig volum av materialet vil teorien være tilnærmet gyldig.

LEFM utgjør en betydelig del av det teoretisk grunnlaget for EPFM. I EPFM aksepteres en viss grad av plastisering, hvilket utvider gyldighetsområdet for teorien. EPFM omhandles i Kapittel 3.



Spenningskonsentrasjoner ved sprekker (Kap. 2.2)

Plan plate | **Plan plate med sirkulært hull** | **Plan plate med elliptisk hull** | **Plan plate med sprekk**



Plan plate:

$$\sigma_A = \sigma$$

Brudd når:

$$\sigma_A = \sigma_c$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma_f = \sigma_c$$

Plan plate med sirkulært hull:

$$\sigma_A = k_t \sigma$$
$$k_t = 3$$

Brudd når:

$$\sigma_A = \sigma_c$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma_f = \frac{\sigma_c}{3}$$

Plan plate med elliptisk hull:

$$\sigma_A = k_t \sigma$$
$$k_t = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

Brudd når:

$$\sigma_A = \sigma_c$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma_f = \frac{\sigma_c}{1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}}$$

Plan plate med sprekk:

$$\sigma_A = k_t \sigma$$
$$k_t = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \underset{\rho \to 0}{\to} \infty$$

Brudd når:

$$\sigma_A = \sigma_c \underset{\rho \to 0}{\to} \infty$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma_f = \frac{\sigma_c}{1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}} \underset{\rho \to 0}{\to} 0$$

<u>Konklusjon:</u>

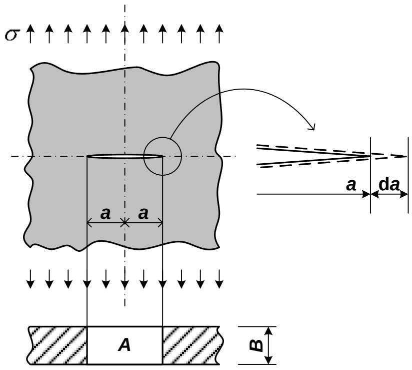
- Ved tradisjonelle lineær-elastiske styrkeberegninger antas at brudd inntreffer om den maksimale lokale spenningen σ_A overstiger en kritisk spenning for materialet σ_c.

- Ved sprekker fører spenningskonsentrasjonen til at spenningen ved sprekkspissen går mot uendelig (singularitet). Dette skulle tilsi at brudd inntreffer idet den ytre belastningen overstiger null, hvilket ikke samsvarer med virkeligheten.
  (Merk at ytre trykk gjør at sprekken lukkes og kan overføre normalspenninger. Sprekker har derfor liten eller ingen betydning under trykk.)

- For komponenter med sprekker kan man følgelig ikke anvende et enkelt spenningskriterium som bruddkriterium.

- Dette ledet Griffith til å foreslå et bruddkriterium som heller er basert på en energibalanse for sprekkvekst.

Griffith-analyse (Kap. 2.3)



Griffith studerte sprekker i glass, og foreslo (1920) et kriterium for brudd basert på en energibalanse, altså i tråd med termodynamikkens første lov (om energiens bevarelse).

Griffith antok at energien i systemet, *E*, kan beskrives som to former:

$$E = \Pi + W_s$$

Π: Potensiell energi lagret som elastisk tøyningsenergi samt arbeid fra ytre krefter

W_s: Arbeid for å skape ny sprekkflate (altså bryte atom-bånd)

For at sprekken skal vokse må systemets energi *E* avta med sprekkarealet *A*, altså:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}A} \leq 0$$

Sprekkarealet *A* er her definert som sprekkens projiserte areal og er knyttet til sprekklengden *a* og platetykkelsen *B* som (se figur):

$$A = 2aB$$

Derivasjon av *E* gir bruddkriteriet som:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}A} = \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}A} + \frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}A} = 0$$

som gir:

$$-\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}A} = \frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}A}$$

Venstresiden omformes til en funksjon av spenning ved å adoptere et resultat fra Inglis:

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E'}$$

Π_0: Π for legemet uten sprekk (*a*=0)

E': Materialets elastitetsmodul

Derivering gir:

$$-\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}A} = -\frac{1}{2B}\left(\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}a}\right) = -\frac{1}{2B}\left(-\frac{\pi\sigma^2 2aB}{E'}\right)$$

$$-\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}A} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E'}$$

Høyresiden i bruddkriteriet kan uttrykkes som funksjon av materialets spesifikke overflateenergi γ_s (energi/overfalte) ganger sprekkens overflateareal. Da sprekken har 2 motstående sideflater blir overflatearealet lik 2*A*. Den totale overflateenergien blir dermed:

$$W_s = 2A\gamma_s = 4aB\gamma_s$$

Derivasjon gir:

$$\frac{\mathrm{d}\,W_s}{\mathrm{d}\,A} = 2\gamma_s$$

Bruddkriteriet blir da:

$$\frac{\pi\sigma^2 a}{E'} = 2\gamma_s$$

som løst for σ gir bruddspenningen som

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2\gamma_s E'}{\pi a}}$$

Vi har dermed et uttrykk for å beregne ved hvilken spenning bruddet vil kunne inntreffe dersom vi kjenner sprekkens størrelse.

Materialets overflateenergi må finnes ved testing. Man må lage en prøve lignende figuren (naturligvis med begrensede platedimensjoner) med en kunstig tillaget sprekk, og belaste den i laboratoriet til brudd inntreffer. Materialets overflateenergi finner da fra samme uttrykk løst med hensyn på γ_s:

$$\gamma_s = \frac{\sigma_f^2 \pi a}{2E'}$$

Uttrykket for bruddspenningen i følge Griffith er strengt tatt gyldig kun for idealisert lineært materiale, dvs. at sprekkvekst skjer uten plastiske deformasjoner. For virkelige materialer vil det være en viss plastisering lokalt ved sprekkspissen. Denne plastiske deformasjonen innebærer absorpsjon av energi utover γ_s. For å ta høyde for dette kan Griffiths uttrykk modifiseres som

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E'(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a}}$$

hvor γ_s er energiabsorpsjon pr. overflateareal relatert til plastiske deformasjoner lokalt ved sprekkspissen. Man kan også velge å innbefatte alle tenkelige former for energidissipasjon i én parameter for bruddenergi, w_f:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E' w_f}{\pi a}}$$

Uttrykkene over for bruddspenningen gjelder kun for den angitte geometrien; en uendelig plate med gjennomgående sprekk og uniform spenning. For andre geometrier må man finne det relevante uttrykket for Π som erstatning for Inglis' uttrykk og utlede bruddspenningen på tilsvarende måte som over. Dette er en svært upraktisk rutine, og uttrykk for Π finnes kun for et meget begrenset antall geometrier.

En mer praktisk formulering er derfor gitt i neste underkapittel: Energy Release Rate.

Energy Release Rate, *G* (Kap.2.4)

”Energy Release Rate” er en mer generell formulering av Griffiths energibalanse. Vi definerer *G* som

$$G = -\frac{\mathrm{d}\,\Pi}{\mathrm{d}\,A}$$

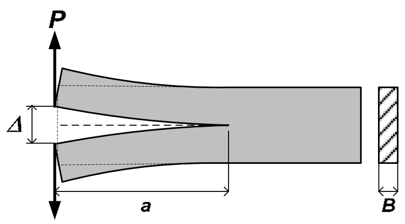
altså lik venstresiden av Griffiths bruddkriterium hvor Π er legemets potensielle energi. *G* gir følgelig uttrykk for hvor mye energi som frigjøres når sprekken vokser et enhetsareal. *G* betegnes også som ”den drivende kraft” for sprekkvekst.

I stedet for å knytte materialets motstand mot brudd til overflateenergien, velger vi å definere en kritisk verdi av *G* for materialet, G_c. Kriteriet for brudd blir da:

$$G \geq G_c$$

G_c betraktes som en målbar materialegenskap og betegnes også som materialets ”bruddseighet”.

For å gjøre konseptet noe lettere anskuelig og praktisk anvendbart må uttrykket for *G* utvikles videre. Vi ønsker å uttrykke *G* som funksjon av last *P* eller forskyvning Δ.



Vi betrakter en geometrien tilvenstre (”double cantilever beam”) - en plate som splittes med en sprekk så den utgjør to utkrager-bjelker. Den påføres en kraft *P* ved enden av bjelkene som medfører en lastpunkt-forskyvning Δ.

Vi lar sprekken vokse et inkrement, d*a*, for å utlede hvor mye energi som frigjøres. For å forenkle problemstillingen velger vi å betrakte enten lasten som konstant (lastkontroll) eller forskyvningen som konstant (forskyvningskontroll). Vi skal til slutt vise at disse to betraktningsmåtene gir samme resultat.

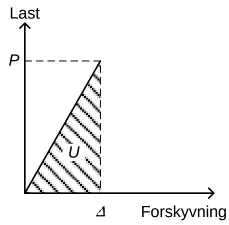
Den potensielle energien Π består av to type, tøyningsenergi *U* og arbeid utført av ytre laster *F*. Altså:

$$\Pi = U - F$$

(At *F* her får negativt fortegn skylles at den potentielle energien avtar når Δ øker, så *F*, som er ”kraft × vei”, er en negativ størrelse. Sammenlign med et legeme i et gravitasjonsfelt. Den potensiell energien avtar med avstand fra utgangspunktet, altså nedover.)

Tøyningsenergien er fordelt i det belastede legemet, men er blitt tilført gjennom en pålastning (se figur). Tøyningsenergien for en gitt sprekkstørrelse kommer derfor til uttrykk som:

$$U = \int_0^{\Delta} P\,\mathrm{d}\,\Delta = \tfrac{1}{2} P\Delta$$



Lastkontroll:

Vi holder fast øvre lastpunkt og belaster nedre lastpunkt med en konstant kraft *P*. Vi fårda:

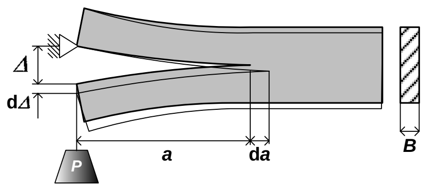
$$F = P\Delta$$

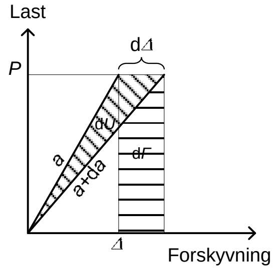
$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{dA}\right)_P = P\left(\frac{\mathrm{d}\Delta}{dA}\right)_P = \frac{P}{B}\left(\frac{\mathrm{d}\Delta}{da}\right)_P$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{dA}\right)_P = \tfrac{1}{2}P\left(\frac{\mathrm{d}\Delta}{dA}\right)_P = \frac{P}{2B}\left(\frac{\mathrm{d}\Delta}{da}\right)_P$$

$$G = -\left(\frac{\mathrm{d}\Pi}{dA}\right)_P = -\left[\left(\frac{\mathrm{d}U}{dA}\right)_P - \left(\frac{\mathrm{d}F}{dA}\right)_P\right]$$

$$G = \frac{P}{2B}\left(\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}a}\right)_P$$





Vi ser at for sprekkvekst underholder lastkontroll frigjøres energi gjennom arbeid av ytre krefter (rektangelet d*F*). Men halvparten av denne energien absorberes i legemet som økning i elastisk tøyningsenergi (trekanten d*U*). Det resterende, som derfor også er lik endringen i tøyningsenergi, er tilgjengelig for sprekkvekst.

Forskyvningskontroll:

Vi holder fast begge lastpunktene med en konstant forskyvning Δ som gir en kraft *P*. Vi lar så sprekklengden *a* øke et inkrement d*a*. Da dette ikke vil medføre noen endring i "veien" Δ får vi heller ingen endring i arbeid fra ytre krefter ("kraft × vei"), altså:

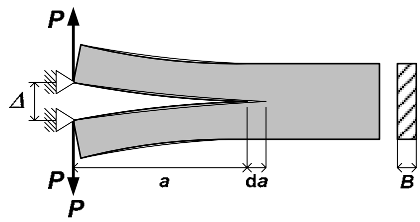
$$F = 0 \qquad \left(\frac{\mathrm{d}F}{dA}\right)_\Delta = 0$$

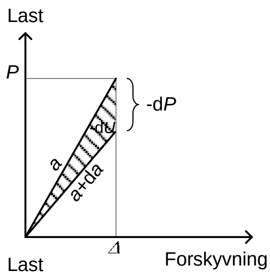
Videre:

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{dA}\right)_\Delta = \tfrac{1}{2}\Delta\left(\frac{\mathrm{d}P}{dA}\right)_\Delta = \frac{\Delta}{2B}\left(\frac{\mathrm{d}P}{da}\right)_\Delta$$

$$G = -\left(\frac{\mathrm{d}\Pi}{dA}\right)_P = -\left[\left(\frac{\mathrm{d}U}{dA}\right)_P - 0\right]$$

$$G = -\frac{\Delta}{2B}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}a}\right)_\Delta$$



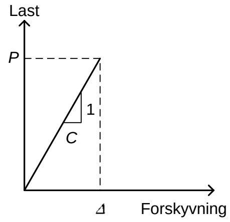


Vi ser at for sprekkvekst underholder forskyvingskontroll frigjøres energi kun gjennom reduksjon av elastisk tøyningsenergi (trekanten -d*U*). Legg merke til at *P* avtar, dvs at $(\mathrm{d}P/\mathrm{d}a)_\Delta$ er negativ og *G* blir positiv..

<u>Sammenligning last- og forskyvningskontroll:</u>

Uttrykkene for *G* under henholdsvis last- og forskyvningskontroll er tilsynelatende ulike, men regnes begge som definisjoner på *G*. For å vise at de er like innfører vi begrepet komplians:

$$C = \frac{\Delta}{P}$$



Kompliansen (invers stivhet) er en funksjon av sprekklengden *a*, men da *C* er forholdet mellom forskyving og last må *C* være uavhengig av om sprekkvekst skjer under last- eller forskyvningskontroll.

Under lastkontroll: $\Delta = PC \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}a}\right)_P = P\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}\right)_P = P\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}$

$$G = \frac{P}{2B}\left(\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}a}\right)_P = \frac{P}{2B}\left(P\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}\right) = \frac{P^2}{2B}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}$$

Under forskyvningskontroll: $P = \Delta C^{-1} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}a}\right)_\Delta = -\Delta C^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}\right)_\Delta = -\frac{PC}{C^2}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a} = -\frac{P}{C}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}$

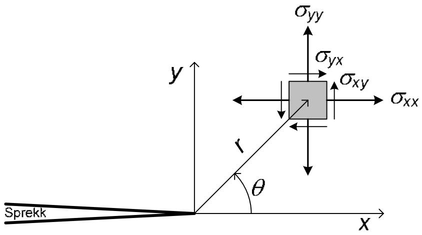
$$G = -\frac{\Delta}{2B}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}a}\right)_\Delta = -\frac{PC}{2B}\left(-\frac{P}{C}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}\right) = \frac{P^2}{2B}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}$$

Spenningsanalyse av sprekker (Kap. 2.6)

<u>Spenningsintensitetsfaktoren</u>

Vi har tidligere vist at å basere et bruddkriterium på maksimal spenning ikke er meningsfylt i forbindelse med sprekker. Likevel kan *spenningsfeltet* nær sprekkspissen beskrives og karakteriseres ved hjelp av én enkelt parameter; *spennings-intensitetsfaktoren* K_I, som har fått en helt sentral rolle i bruddmekanikken.

Utledingen av spenningsfeltet ved sprekkspissen er gjengitt i appendiks A2.3 til T.L. Anderson og er relativt kompleks. Vi skal derfor nøye oss med å anskueliggjøre fenomenet og gjengi resultatene.

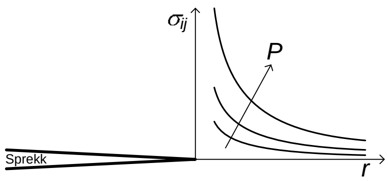


Vi betrakter en sprekk som vist på figuren. Et inkrementelt element nær sprekk-spissen er utsatt for en spenningstilstand σ_{ij}.

(*i* angir normalen til flaten σ_{ij} virker på, *j* angir retningen til spenningstensoren σ_{ij}. Altså har vi normalspenninger når *i*=*j* og skjærspenninger når *i*≠*j*.)

Vi tenker oss at elementet befinner seg nær opptil sprekkspissen, slik at avstander til ytre flater er store. Vi kan da resonere som følger:

- Vi har en singularitet i sprekksissen ($\sigma_{ij} \to \infty$ for r $\to$ 0) og en spenning σ_{ij} som avtar med avstanden *r*.
- Styrken på spenningsfeltet må være proporsjonalt med den ytre pålagte lasten (eller spenningen) fordi legemet er isotropt og lineær elastisk.
- Formen på spenningsfeltet må være dominert av sprekkspissens geometri fordi det ikke finnes andre geometriske flater i nærheten, og sprekkspissens geometri er ikke variabel. Derfor må formen på spenningsfeltet være gitt (likt for alle globale geometrier.



Spenningsfeltet kan altså beskrives kvalitativt som på figuren til venstre hvor hver graf angir den lokale spenningen for en gitt ytre last eller spenning. Formen på kurvene er like, men den øvre grafen representer større ytre last enn den nedre, og har derfor større styrke.

Mange forskere arbeidet i samme tidsrom med å utlede løsninger for dette spenningsfeltet, og æren deles i dag mellom Westergaard, Irwin, Sneddon og Williams. De kom frem til en løsning basert på på følgende form:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}}\right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta)$$

I første ledd har vi konstanten *k* som angir styrken på singulariteten. $f_{ij}(\theta)$ er en ren funksjon av vinkelen. En viktig observasjon er at det første leddet er proporsjonalt med 1/√r og bidrar til store spenninger nær sprekkspissen.

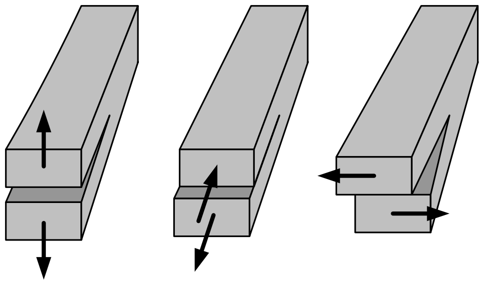
De høyere ordens leddene er av tilsvarende form som det første, dog med ulike konstanter (A_m) og vinkelavhengigheter $g_{ij}^{(m)}(\theta)$ for hvert ledd. Men avhengigheten til *r* er av høyere orden (r^0, $r^{0.5}$, r^1, $r^{1.5}$, r^2, . . .). Bidraget til spenningsfeltet blir derfor ubetydelig nær sprekkspissen. Vi antar derfor at de høyere ordens leddene kan neglisjeres. Spenningsfeltet ved sprekkspissen kan da uttrykkes som:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\right) f_{ij}(\theta)$$

Legg merke til at vi her erstattet *k* med $K_I / \sqrt{(2\pi)}$. Grunnen til dette er kun estetisk – det gir en penere sammenheng mellom K_I og *G*. K_I betegnes <u>spenningsintensitetsfaktoren</u>.

Belastnings-modi

Spenningsintensitetsfaktoren er så langt blitt betegnet K_I, altså indeksert med romertall I. Dette romertallet referer til hvordan sprekkspissen er belastet. ”Modus I” gir normal-spenninger i sprekkplanets forlengelse. ”Modus II” gir skjærspenninger normalt på sprekkfronten. ”Modus III” gir skjærspenninger parallelt med sprekkfronten. Vi definerer en særskilt spenningsintensitetsfaktoren for hver av disse modi; K_I, K_{II}, K_{III},



Modus I Modus II Modus III

Vi har derfor separate løsninger for $f_{ij}(\theta)$ i uttrykket for spenningsfeltet ved sprekkspissen for hver av de tre modi.

Ved en kombinert belastning kan spenningsfeltet for hver modus superponeres.

Modus I har fått en dominerende rolle innen anvendt bruddmekanikk, hvilket også reflekteres i dette kurset. Man skal imidlertid være klar over at Modus II eller III i enkelte tilfeller kan være dominerende og derfor må tas hensyn til på særskilt vis.

Komplett løsning for spenningstilstanden (Modus I)

Vi kan skrive løsningene for spenningstilstanden under Modus I mer utførlig som:

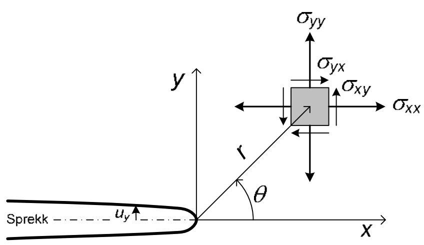
$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} 0 & \text{for plan spenning (pr. def.)} \\ \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) & \text{for plan tøyning (reef. Hookes lov)} \end{cases}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$



De respektive tøyningene avledes fra Hooks lov.

Videre har vi fra spenningsanalysen gitt forskyvningene av sprekkflatene, *u*:

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\kappa-1+2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\kappa+1-2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

hvor μ er skjær-modulen og κ = 3-4ν for plan spenning og κ = (3-ν)/(1+ν)

Sammenheng mellom K_I og ytre belastning

Av uttrykket for σ_{ij} ser vi at styrken på spenningsfeltet (og dermed også tøyningsfeltet) ved sprekkspissen er beskrevet av kun én parameter; K_I. Det er derfor naturlig å anta at brudd vil initieres dersom at K_I overstiger en kritisk verdi for materialet, bruddseigheten K_{Ic}. Bruddkriteriet basert på spenningsintensitetsfaktoren blir dermed:

$$K_I \geq K_{Ic}$$

For å kunne dra nytte av uttrykket over må vi være i stand til å avlede verdien for K_I ut fra geometri og ytre last. Vi har allerede fastslått at spenningene ved sprekkspissen er proporsjonale med ytre last, og da må også K_I være det. Videre har vi sett at spenningen ved sprekkspissen når den beskrives som en flat ellipse er proporsjonal med $\sqrt{a}$. Altså:

$$K_I \approx \sigma\sqrt{a}$$

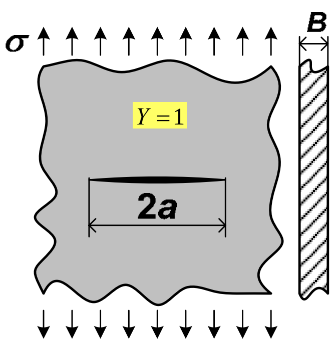
Sammenligning med uttrykket for spenningsfeltet σ_{ij} viser at de to sidene i uttrykket over er dimensjonsmessig riktig. Vi vil imidlertid anta at geometriske forhold også vil spille inn med en dimensjonsløs faktor, *Y*. Vi velger å skrive uttrykket for spenningsintensitetsfaktoren som:

$$K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a}$$

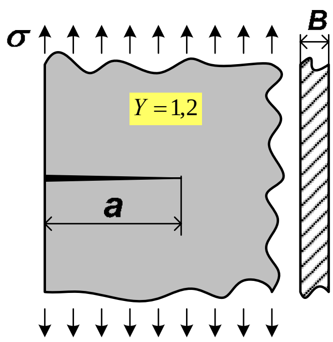
(Innføringen av π i uttrykket over er kun estetisk begrunnet.)

Med uttrykket over er vi i stand til å beregne K_I for alle geometrier hvor *Y* er bestemt. Det finnes flere håndbøker og bruddmekaniske standarder med samlinger av *Y*-faktorer, hvilket har gjort dette til et meget anvendelig konsept. T.L. Anderson gjengir en del sentrale løsninger i appendiks til kapittel 2.

Et par grunnleggende geometrier er vist under:



Uendelig platefelt med gjennomgående sentersprekk utsatt for uniform strekkspenning (membranspenning)

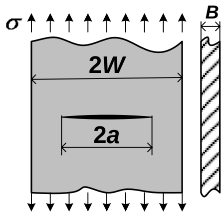


Halv-uendelig platefelt med gjennomgående kantsprekk utsatt for uniform strekkspenning (membranspenning)

Effekt av endelige dimensjoner

Den praktiske anvendeligheten av LEFM har i stor grad vært knyttet til det store tilfanget av geometrifaktorer *Y* for en rekke geometrier og belastningskonfigurasjoner. *Y* påvirkes av de endelige dimensjonene, sprekkens form og størrelse samt hvordan laser legges på.

Løsningene for disse Y-faktorene er fremskaffet ved hjelp av en rekke analyttiske og numeriske metoder, hvorav FE-analyser dominerer i dag. I tillegg finnes det prinsipper for å modifisere eller kombinere eksisterende løsninger for å dekke et spesifikt tilfelle. Dette kommer vi noe mer inn på i kapittel 9, men vi skal nevne et par til her.

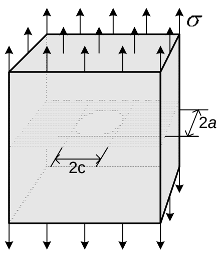


Geometrien til venstre viser en plate med endelig bredde 2W og en gjennomgående sentersprekk. En løsning for denne er fremskaffet analyttisk ved å studere en uendelig plate med en rekke av sprekker hvor en antar symmetrilinjer mellom sprekkene:

$$K_I = \left[\frac{2W}{\pi a}\tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \sigma\sqrt{\pi a}$$

En bedre løsning basert på FE-analyse og kurvetilpasning til resultatene er:

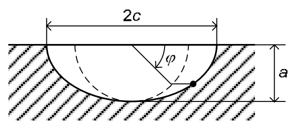
$$K_I = \sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 - 0.025\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0.06\left(\frac{a}{W}\right)^4\right]\sigma\sqrt{\pi a}$$

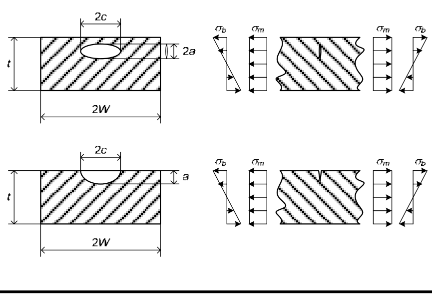


Geometriene omtalt så langt har alle vært 2-dimensjonale. Sprekker i virkelige konstruksjoner er ofte av en 3-dimensjonal natur.

Figuren til venstre viser en sirkulær sprekk i et legeme utsatt for uniform strekkspenning normalt på spekkflaten. Antas legemet å ha uendelig utbredelse er spenningsintensitets-faktoren:

$$K_I = \frac{2}{\pi}\sigma\sqrt{\pi a}$$





En større frihet til å representere virkelige sprekker oppnås ved å anta at sprekken har ellipse-form. Newman & Raju har med FE-analyse fremskaffet løsninger for halvelliptiske overflate-sprekker og elliptiske indre sprekker i plater og sylindere. Resultatene er presentert på formen:

$$K_I = F\sigma\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}$$

der *F* er en dimensjonsløs korreksjon for overflateeffekter og *Q* er en dimensjonsløs korreksjon for ellipsens aspektforhold (*a*/*c*). De komplette uttrykkene er omfattende, men er oppgitt i appendiks til T.L. Anderson kapittel 9.

Superposisjons-prinsippet

For lineær-elastiske materialer kan man generelt addere spenningsfelt (og tøyningsfelt) fra ulike laster eller dekomponere spenningsfelt. Dette kalles superposisjonsprinsippet. Da det lokale spenningsfeltet er knyttet til K_I gjennom

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\right) f_{ij}(\theta)$$

må superposisjonsprinsippet også gjelde K_I. En meget vanlig anvendelse av superposisjonsprinsippet er Newman & Raju's måte å håndtere kombinasjon av membranspenning σ_m og bøyespenning σ_m (se tidligere fig.) for å beregne den totale K_I:

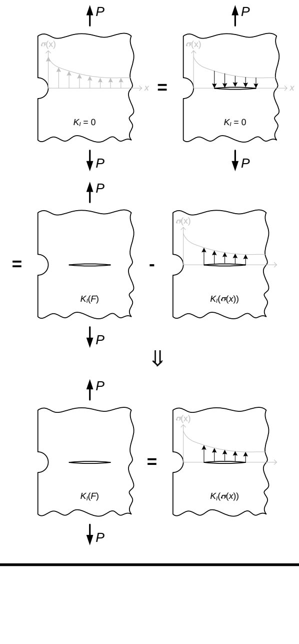
$$K_I^{(total)} = K_I^{(membran)} + K_I^{(bøy)}$$

Newman & Raju's presenterer sine løsninger for kombinert membranspenning og bøyespenning som (se appendiks til T.L. Anderson kapittel 9):

$$K_I = F(\sigma_m + H\sigma_b)\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}$$

hvor F er dimensjonsløs korreksjon for overflateeffekter for membranspenning og $F \times H$ er tilsvarende for bøyespenning.

Vi skal også vise et par eksempler på hvordan superposisjonsprinsippet kan anvendes til å beregne K_I for komplekse geometrier hvor spenningene f.eks. er beregnet med FE-analyse. (Man kan benytte FE-analyser til å beregne K_I direkte, men dette kan være meget resurskrevende.



Den første figuren viser en tilfeldig geometri med last som gir et tilfeldig lokalt spenningsfelt (antydet). Da den ikke har noen sprekk er $K_I = 0$.

Neste figur er identisk, men det er lagt inn en sprekk. I tillegg er det lagt et spenningsfelt i trykk direkte på sprekkflaten som erstatter spenningene materialet nå ikke kan oppta. Ergo lukker spenningsfeltet sprekken og vi har fortsatt $K_I = 0$.

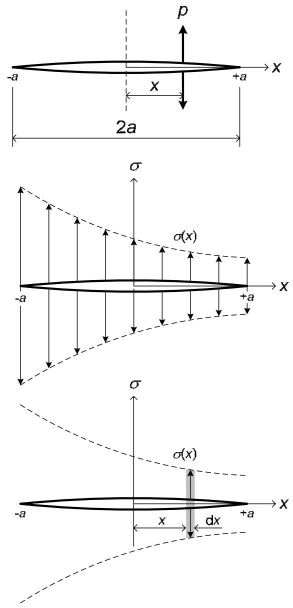
I tredje og fjerde figur har vi dekomponert situasjonen i én med ytre last minus én med lokal spenning i strekk. Hver av disse situasjonene har $K_I \neq 0$, men gir totalt $K_I = 0$.

Ergo må K_I for ytre last være lik K_I for lokal spenning over sprekkflaten som vist med de to siste figurene.

Vi har dermed vist at K_I for en gitt ytre belastning kan bestemmes ut fra det lokale spenningsfeltet over sprekkens utbredelse.

F.eks. kan vi beregne lokale spenninger med FE-analyse uten å modellere sprekken, og så bestemme K_I med enklere metoder basert på det lokale spenningsfeltet. En første tilnærming kan være å tilpasse en lineær spenningsfordeling og anvende en kjent løsning for K_I for en geometri som ligner.

Et annet eksempel på bruk av superposisjon gir oss en mulighet for å beregne K_I for en tilfeldig fordeling av spenninger over sprekkflaten.



Figuren til venstre viser en gjennomgående sprekk av lengde 2*a* i en uendelig plate hvor det er lagt på punkt-last *p* direkte på sprekkflatene i en avstand *x* fra midtlinjen. Lasten medfører en spenningsintensitet for hver av sprekkspissene ved henholdsvis -*a* og +*a*.

Fra litteraturen har vi følgende løsninger:

$$K_I^{(+a)} = \frac{p}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \qquad K_I^{(-a)} = \frac{p}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

Neste figur viser samme sprekk, men med en tilfeldig variabel spenningsfordeling $\sigma(x)$ pålagt hver av sprekkflatene (ref forrige eks.), som vi ønsker å bestemme K_I for. Av den siste figuren ser vi at dette kan gjøres ved å erstatte *p* i øvre figur med $\sigma(x)\times dx$ (se siste figur) og integrere over sprekklengden.

$$K_I^{(+a)} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\sigma(x)\,\mathrm{d}x \qquad K_I^{(-a)} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\sigma(x)\,\mathrm{d}x$$

Integralene over må normalt løses nummerisk. Vi har dermed en metode for å bestemme K_I for en gjennomgående sprekk med enhver kjent spenningsfordeling. En begrensning er dog at avstanden til ytre flater må være store sammenlignet med sprekklengden.

Relasjon mellom K_I og *G* (kap. 2.7)

K_I og *G* er i prinsipp ganske ulike typer parametere. *G* gir uttrykk for frigjøring av potensiell energi når sprekken vokser et med inkrementelt areal, og er utledet fra globale størrelser. K_I, derimot, gir uttrykk for spenningsfeltet foran sprekkspissen. Likevel viser det seg at de to parametrene er nær knyttet til hverandre, hvilket styrker tiltroen til at de begge er egnet for å karakterisere en kritisk bruddtilstand.

Vi har allerede nok til å stille opp sammenhengen mellom K_I og *G* for spesialtilfellet med uendelig platefelt med gjennomgående sprekk og membranspenning. Vi har fra før:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$$

Videre har vi fra Griffith-analysen for samme geometri:

$$-\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}A} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E'}$$

hvor venstre side nettopp er definisjonen på den drivende kraft *G*. Vi ser at telleren på høre side i uttrykket tilsvarer uttrykket for K_I kvadrert. Altså:

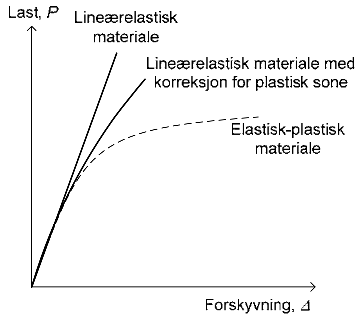
$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad \text{hvor} \quad E' = E \quad \text{for plan spenning}, \qquad E' = \frac{E}{1-\upsilon^2} \quad \text{for plan tøyning}$$

Sammenhengen er avledet fra uttrykk som gjelder kun en spesiell geometri. Irwin viste imidlertid at uttrykket er allmenngyldig (selvstudium).

Den plastiske sonen (kap. 2.8)

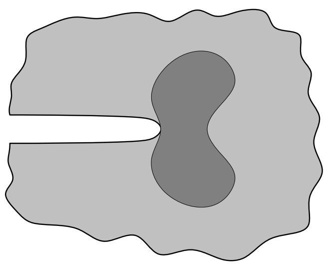
Så langt har vi forutsatt at materialet er lineærelastisk og at spenningen nær sprekkspissen går mot uendelig. Virkelige materialer (metaller) vil imidlertid flyte når spenningen overstiger materiales flytegrense, σ_{YS}. Dvs. at flytning må inntreffe nær sprekkspissen allerede i det en liten ytre last pålegges, og det dannes en plastisk sone.

Med økende belastning øker utbredelsen av den plastiske sonen, og den begynner å påvirke last-forkyvningskurven noe (se fig.). Effekten av dette kan man ta høyde for ved å korrigere LEFM for plastisk sone.



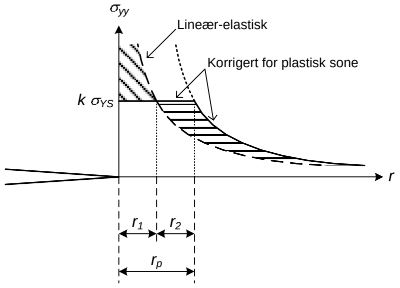
Ved ytterligere pålastning vil store deler av materialet flyte, og LEFM er ikke lenger anvendelig, men vi må ty til elastisk-plastisk teori (LEFM) som kommeri kapittel 3.

Med kjennskap til hvor stor utbredelsen av den plastiske sonen er kan vi sette opp kriterier for når LEFM skal betraktes som gyldig.



Den plastiske sonen har vanligvis en form som sommerfugl-vinger som brer seg ut i vifteform fra sprekkspissen. Men i fortsettelsen vil vi av bekvemmelighets-hensyn tegne den enten som sirkulære felt eller smale bånd i fortsettelsen av sprekkens plan.

Irwin's tilnærming av den plastiske sonen



For å bestemme utbredelsen av den plastiske sonen tok Irwin utgangspunkt i spenningsfeltet forn sprekkspissen. Han så for seg spenningen i y-retning i fortsettelsen av sprekkens plan (θ=0):

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

Nær sprekken vil σ_{yy} overstige en verdi hvor materialt flyter, $k\sigma_{YS}$.

Faktoren k er utelatt i T.L. Anderson. Den tar høyde for at flytespenningen kan være høyere under tre-aksiell spenningstilstand nær sprekkspissen (plan tøyning) enn for en-akset strekk (plan spenning).

Irwin antok at $k\sigma_{YS}$ representerer et tak på spenningsnivået som gjør at flytesonen minst må strekke seg ut til r_1 (se fig.). Videre antok Irwin at spenningene som ikke blir opptatt av materialet nær sprekkspissen må tas opp mer distansert for å opprettholde en spenningsmessig balanse. Han antok intuitivt at kurven for σ_{yy} parallellforskyves mot større r slik at flytesonens utbredelse blir r_p=r_1+r_2. Likevekt er oppfylt når de to skraverte feltene i figuren er like store.

Det venstre feltet bestemmes ved å integrere uttrykket for σ_{yy} fra r=0 til r=r_1 og trekke fra rektangelet under $k\sigma_{YS}$.fra r=0 til r_1. Det høyre feltet er kun en paralelleforkyvning av kurven for σ_{yy} en bredde r_2, og er derfor lik rektangelet under $k\sigma_{YS}$.fra r_1 til r_2. Likehet gir da:

$$\int_0^{r_1} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\,\mathrm{d}r - k\sigma_{yy} r_1 = k\sigma_{yy} r_2 \;\Rightarrow\; r_p = (r_1 + r_2) = \frac{K_I}{k\sigma_{yy}\sqrt{2\pi}} \int_0^{r_1} r^{-0.5}\,\mathrm{d}r = \frac{2K_I\sqrt{r_1}}{k\sigma_{yy}\sqrt{2\pi}}$$

Vi har også at den lineær-elastiske kurven krysser $k\sigma_{YS}$ ved r_1. Altså:

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_1}} = k\sigma_{YS} \;\Rightarrow\; r_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{k\sigma_{YS}}\right)^2$$

som innsatt i uttrykket for r_p gir:

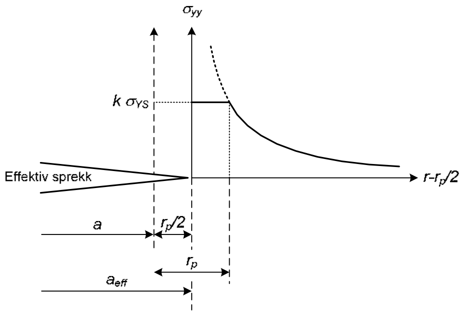
$$r_p = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_I}{k\sigma_{YS}}\right)^2$$

Legg merke til at r_p er doble r_1.

Fra mekanikkens plastisitetsteori har vi at k er 1 og √3 for henholdsvis plan spenning og plan tøyning. Altså:

$$r_p = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}}\right)^2$$ for plan spenning

$$r_p = \frac{1}{3\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}}\right)^2$$ for plan tøyning



Irwin foreslo videre å anvende dette resultatet til å korrigere LEFM for den plastiske sonen. Observer at ved å forskyve sprekkspissen $r_p/2$ inn i den plastiske sonen vil spenningsfeltet foran sprekkspissen få tilsvarende form som når man antar lineær-elastiske forhold. Irwin innførte derfor en "effektiv sprekklengde", a_{eff}:

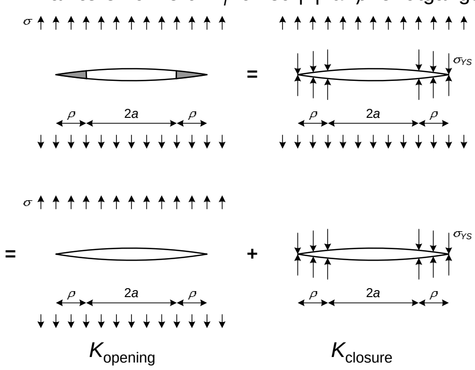
$$a_{eff} = a + \frac{r_p}{2}$$

Han foreslo så å beregne en "effektiv K_I" basert på det konvensjonelle utttrykket for K_I hvor a erstattes med a_{eff}:

$$K_{eff} = Y(a_{eff})\sigma\sqrt{\pi a_{eff}}$$

Dugdale's Strip Yield-modell

Dugdale valgte et annen måte å bestemme flytesonens utbredelse på. Han tenkte seg at flytning skjer i et bånd (eng: strip) i fortsettelsens av sprekkens plan, altså at flytesonen har en neglisjerbar høyde men begrenset lengde ρ (se 1. fig.). Innenfor denne flytesonen må vi ha at spenningen normalt på planet, σ_{yy}, er lik flytegrensen σ_{YS}. Vi må da kunne erstatte materialet i flytesonen med et pålagt spenningsfelt av størrelse σ_{YS} (se 2. fig.). Ved bruk av superposisjonsprinsippet kan vi dekomponere denne situasjonen i en med kun ytre spenning (3. fig.) og en med kun det pålagte spenningsfeltet i $|x|=a$ til $|x|=a+\rho$. Vi betegner K_I ved $|x|=a+\rho$ for disse to situasjonene for $K_{opening}$ og $K_{closure}$. Summen av disse må være null fordi $K_I=0$ ved $|x|=a+\rho$ for utgangspunktet (1. fig.).



Utbredelsen av flytesonen finnes dermed ved å bestemme $K_{opening}$ og $K_{closure}$. Fra tidligere vet vi at:

$$K_{opening} = \sigma\sqrt{\pi(a+\rho)}$$

$K_{closure}$ kan utlede fra et tidligere uttrykk for K_I for punktlast på sprekkflatene:

$$K_I^{(+a)} = \frac{p}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

$$K_I^{(-a)} = \frac{p}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

Vi erstatter p med $-\sigma_{YS}dx$ og og a med $(a+\rho)$ og integrerer fra $x=a$ til $x=a+\rho$:

$$K_{closure} = -\frac{\sigma_{YS}}{\sqrt{\pi a}}\left[\int_a^{a+\rho}\sqrt{\frac{a+\rho+x}{a+\rho-x}}\,\mathrm{d}x + \int_a^{a+\rho}\sqrt{\frac{a+\rho-x}{a+\rho+x}}\,\mathrm{d}x\right]$$

Disse integralene kan løses analyttisk, men vi bruker en håndbokløsning som gir:

$$K_{closure} = -2\sigma_{YS}\sqrt{\frac{a+\rho}{\pi}}\arccos\left(\frac{a}{a+\rho}\right)$$

$K_{opening}+K_{closure}=0$ medfører da at:

$$\frac{a}{a+\rho} = \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}}\right)$$

For å uttrykke ρ som funksjon av K_I velger vi å ekspandere cosinus-funkjonen ved hjelp av Taylor serie-ekspansjon (se ramme):

Taylor-rekkeutvikling er en teknikk innen matematikken for å uttrykke funksjoner om et punkt på rekkeform. Taylor viste at enhver funksjon $f(x)$ kan uttrykkes som:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\frac{\mathrm{d}^i f(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^i}(x-\alpha)^i + R_n$$

såfremt restleddet R_n konvergerer mot 0 når $n\rightarrow\infty$. Vi benytter her løsningen:

$$\cos(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

$$\frac{a}{a+\rho} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}}\right)^6 + \cdots$$

Vi antar at $\sigma<\sigma_{YS}$ når LEFM er gyldig, og neglisjerer derfor høyere ordens ledd utover de to første.

$$\frac{a}{a+\rho} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}}\right)^2$$

som løses for ρ som følger:

$$\rho = \frac{a}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}}\right)^2} - a = a\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}}\right)^2}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}}\right)^2} \underset{\frac{\sigma}{\sigma_{YS}}<<1}{\approx} a\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}}\right)^2 = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sigma_{YS}}\right)^2$$

Vi kjenner her igjen uttrykket for K_I, og kan dermed skrive:

$$\rho = \frac{\pi}{8}\left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}}\right)^2$$

Dugdales modell er utviklet for plan spenning. Sammenligner vi Dugdales uttrykk med Irwins uttrykk for plan spenning ser vi at

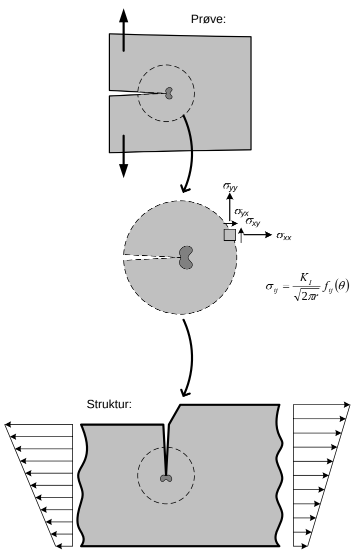
$$\frac{\rho_{Dugdale}}{\rho_{Irwin}} = \frac{\pi/8}{1/\pi} = \frac{0.393}{0.318} = 1.23$$

De to modellene predikerer altså en plastiske sone i samme størrelsesorden, men Dugdales mer fundamentalt begrunnede modell gir et noe større anslag.

Også Dugdales modell kan anvendes til å korrigere LEFM for den plastiske sonen. Berdekin og Stone utviklet et uttrykk basert på Dugdales Strip Yield Model, men via elastisk-plastisk bruddmekanikk som vi kommer tilbake til i kap. 3:

$$K_{eff} = \sigma_{YS}\sqrt{\pi a}\left[\frac{8}{\pi^2}\ln\sec\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

K-kontollert brudd (kap. 2.9)



Spenningsanalysen som ledet frem til definisjonen av K_I, K_{II}, og K_{III} gjelder for lineært materiale. Eksistensen av en flytesone forstyrrer dette bildet.

Vi vil illustrerer at selv om spenningsfeltet nær sprekkspissen ikke følger LEFM, kan LEFM anvendes som bruddkriterium forutsatt at den plastiske sonen er tilstrekkelig liten.

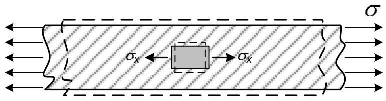
Vi tenker oss et "fritt legeme" som utgjør et område rundt sprekkspissen i en prøve belastet til begynnende brudd, K_I=K_{Ic}. Legemets er ikke større enn at det i sin helhet ligger innenfor den K_I-dominerte del av spenningsfeltet.

Vi innfører så en plastisk sone som ikke er større enn at spenningene ved overflaten av det "frie legemet" forblir praktisk talt uendret.

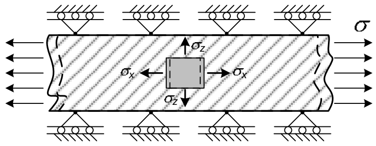
Vi nå tenker oss at vi flytter det "frie legemet" over i en struktur av samme materiale som påfører legemet det samme spenningsbildet på dets overflate. Prøven og strukturen har følgelig både samme bergningsmessige K_I-verdi og samme spennings-tøynings-felt innenfor det frie legemet. Følgelig må også K_I-verdien for strukturen representere begynnende brudd.

Plan spenning og plan tøyning (kap. 2.10)

Begrepene plan spenning og plan tøyning har fått en spesielt stor oppmerksomhet innenfor bruddmekanikken fordi spenningstilstanden påvirker brudd i betydelig grad.



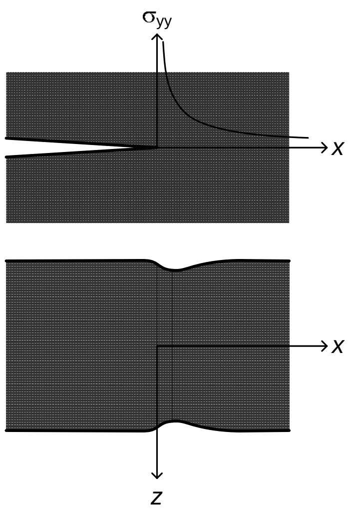
Vi sier å ha "plan spenning" når alle spenningskomponenter ligger i ett plan, dvs. at spenninger normalt på planet er null.



Vi sier å ha "plan tøyning" når alle tøyningskomponentene ligger i ett plan, dvs at tøyninger normalt på planet er null.

Figurene over illustrerer forskjellene for en plate i strekk (uten sprekk). Ved plan spenning får platen deformere seg fritt i tykkelsesretningen. Derfor oppstår ingen spenning normalt plateplanet. Ved plan tøyning fastholdes deformasjonen i tykkelsesretningen. Følgelig får vi ingen tøyning i tykkelsesretningen. Men kraften som kreves for å fastholde tykkelsen overføres som spenning (σ_z) rettet normalt plateplanet. Vi får da en tre-aksiell spenningstilstand.

Vi ser så på en plate med sprekk. Selv om den ikke fastholdes i tykkelsesretningen vil det oppstå tre-aksielle spenninger nær sprekkspissen, altså en viss grad av plan tøyning. Det kan forklares ut fra den ekstreme spennings- og tøynings-gradienten nær sprekksissen.

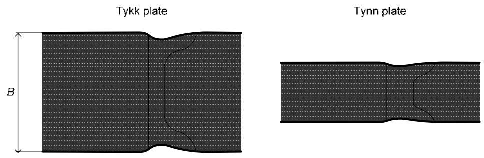


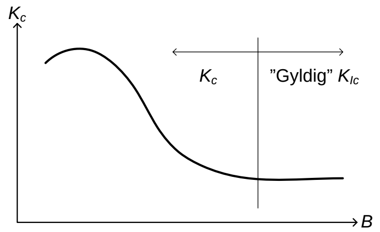
Figuren antyder skjematisk at spenningene i *y*-retning er store (mørke felt) nær sprekken. Dermed er også tøyningene store i *y*-retning. Dette impliserer at materialet her "ønsker" å trekke seg kraftig sammen i tykkelsesretningen *z*.

Lenger fra sprekkspissen er spenningene og tøyningene vesentlig mindre, så materialet er "ikke villig" til å trekke seg vesentlig sammen i *z*-retningen.

De ulike sonene må være kompatible (henge sammen). Derfor får ikke materialet nærmest sprekkspissen deformert seg fritt i *z*-retningen. Det er med andre ord delvis fastholdt av materialet omkring. Det bygges opp spenninger i tykkelsesretningen som gir plan tøyningstilstand (tre-aksielle spenninger).

I figurene foran er den plastiske sonen tegnet som om den er like stor gjennom tykkelsen av platen. Men ved overflaten må vi ha plan spenning fordi spenningen normalt på en fri overflate må være null. Innover mot midten av sprekk fronten får tiltagende grad av plan tøyning. I følge Irwins uttrykk for utbredelsen av den plastiske sonen vil den altså kunne være 3 ganger større ved overflaten enn i sentrum av platen.





Når vi måler bruddseighet på prøver med ulike tykkelser ser vi at bruddseigheten avtar med tykkelsen. Denne <u>tykkelseseffekten</u> forklares med at motstanden mot brudd er vesentlig lavere under plan tøyning enn under plan spenning.

Hvis platen er tynn får vi plan spenning gjennom hele tykkelsen og høy bruddseighet. Med økende platetykkelse vil det bli økende grad av plan tøyning i sentrum og dermed avtagende bruddseighet. Bruddseigheten flater imidlertid ut for store tykkelser fordi man når en tilstand med maksimal grad av plan tøyning

<u>Tykkelseseffekten</u> er blitt viet mye oppmerksomhet fordi den kan bidra til ukonservative analyser: Man kan måle bruddseigheten med en liten prøvestav i laboratoriet (høy bruddseighet) og anvende den for å analysere en struktur med stor platetykkelse (lav bruddseighet). Derfor er det utviklet et kriterium for hva vi betegner som en ”gyldig K_{Ic}-verdi”:

$$B \geq 2.5\left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}}\right)^2$$

Når laboratorieprøvens tykkelse oppfyller dette kriteriet kan vi anta at vi har hatt plan tøyning, og bruddseigheten betegnes K_{Ic}. Vi vet da at verdien er konservativ, og vi får anvende den for alle platetykkelser i strukturen.

Dersom dette kriteriet ikke er oppfylt skal vi betegne bruddseigheten K_c. En K_c-verdi skal kun benyttes etter at man har forsikret seg om at strukturens platetykkelse ikke er vesentlig større enn for laboratorieprøven

Hvis vi sammenligner tykkelseskriteriet med Dugdales uttrykk for den plastiske sonen under plan tøyning får vi:

$$\frac{r_p}{L} = \frac{1/(3\pi)}{2.5} = \frac{0.106}{2.5} = 0.04$$

Kriteriet medfører følgelig en ganske sterk begrensning i tillatt utbredelsen av den plastiske sonen.