MEK 4520 BRUDDMEKANIKK

<u>Løsningsforslag til obligatorisk øving 1.</u>

<u>Oppgave 1 (G)</u>

Vis at sprekkarbeidet ("energy release rate") G for et lineær-elastisk materiale er knyttet til endring i kompliansen C.

<u>Definisjon av G:</u>

$$G = -\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}A} = -\frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}a}, \quad \Pi = U - F$$

hvor U er lagret tøyningsenergi i legemet og F er arbeid utført av ytre krefter.

<u>Lastkontroll (P holdes konstant ved sprekkvekst):</u>

Når kraften er konstant blir arbeidet lik kraft ganger vei:

$$F = P\Delta$$

Endring i arbeid for en infinitesimal økning av sprekklengden blir da:

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{da}\right)_P = P\left(\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}a}\right)_P$$

Ved en gitt sprekkstørrelse kan den lagrede tøyningsenergien bli tilført ved en lineær pålastning slik at energien tilsvarer triangelet under last-forskyvning-skurven:

$$U = \frac{1}{2}P\Delta$$

som gir endringen i tøyningsenergien ved en infinitesimal økning av sprekkstørrelsen som

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{da}\right)_P = \frac{1}{2}P\left(\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}a}\right)_P$$

(Legg merke til at endringen i kraftens arbeid gir et positivt bildrag til G fordi Δ øker mens endring i lagret tøyningsenergi gir et negativt bidrag til G som er halvparten så stort. Vi kan si at når sprekken vokser vil kraftens arbeid frigjøre energi hvorav halvparten medgår til å øke tøyningsenergien mens den andre halvparten blir tilgjengelig for danne ny sprekkflate. Om denne energien er stor nok til å gi sprekkvekst har vi ennå ikke tatt stilling til.)

Da får vi:

$$G = -\frac{1}{B}\left(\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}a}\right)_P = -\frac{1}{B}\left[\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}\right)_P - \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a}\right)_P\right] = -\frac{1}{B}\left[\frac{1}{2}P\left(\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}a}\right)_P - P\left(\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}a}\right)_P\right] = \frac{P}{2B}\left(\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}a}\right)_P$$

Vi innfører kompliansen, C:

$$C = \frac{\Delta}{P} \quad \Rightarrow \quad \Delta = PC \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}a}\right)_P = P\left(\frac{\mathrm{d}C}{da}\right)_P = P\frac{\mathrm{d}C}{da}$$

Merk at suffiks P er fjernet fra ($\mathrm{d}C/\mathrm{d}a$) da kompliansen er uavhengig av om den endres under last- aller forskyvningskontroll. Innført i siste uttrykk for G får vi:

$$G = \frac{P^2}{2B}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}$$

<u>Forskyvningskontroll ($\varDelta$ holdes konstant ved sprekkvekst):</u>

Når forskyvningen er konstant gjør lasten intet arbeid. Dermed blir endring i arbeid for en infinitesimal økning av sprekklengden:

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{da}\right)_\Delta = 0$$

Tøyningsenergien er som før:

$$U = \frac{1}{2}P\varDelta$$

som gir endringen i tøyningsenergien ved en infinitesimal økning av sprekkstørrelsen som

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{da}\right)_\Delta = \frac{1}{2}\varDelta\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}a}\right)_\Delta$$

(Legg nå merke til at endringen i kraftens arbeid gir null bildrag til G mens endring i laget tøyningsenergi gir et positivet bidrag til G fordi P synker. Nå er det altså fra tøyningene vi får energi frigjort fra, og alt er tilgjengelig for å danne ny sprekkflate.)

Da får vi:

$$G = -\frac{1}{B}\left(\frac{\mathrm{d}\varPi}{\mathrm{d}a}\right)_\Delta = -\frac{1}{B}\left[\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}\right)_\Delta - \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a}\right)_\Delta\right] = -\frac{1}{B}\left[\frac{1}{2}\varDelta\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}a}\right)_\Delta - 0\right] = -\frac{\varDelta}{2B}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}a}\right)_\Delta$$

Vi innfører kompliansen, C:

$$C = \frac{\varDelta}{P} \quad\Rightarrow\quad P = \frac{\varDelta}{C} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}a}\right)_\Delta = \varDelta\frac{-1}{C^2}\left(\frac{\mathrm{d}C}{da}\right)_P = \varDelta\frac{-1}{\left(\frac{\varDelta}{P}\right)^2}\left(\frac{\mathrm{d}C}{da}\right)_P = -\frac{P^2}{\varDelta}\frac{\mathrm{d}C}{da}$$

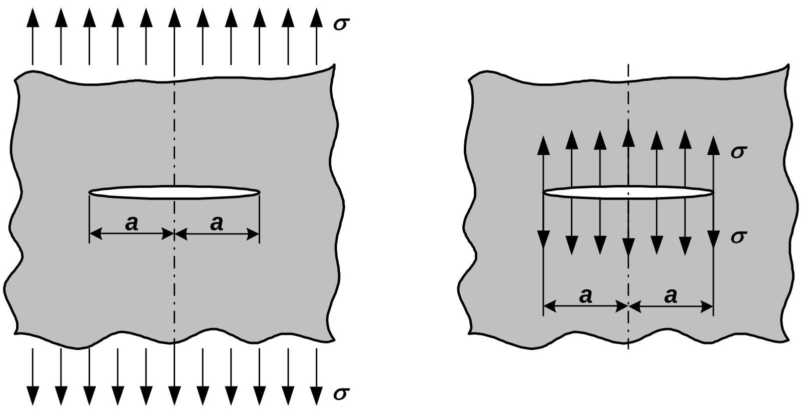
Igjen er suffiks P er fjernet fra ($\mathrm{d}C/\mathrm{d}a$) da kompliansen er uavhengig av om den endres under last- aller forskyvningskontroll. Innført i siste uttrykk for G får vi:

$$G = \frac{P^2}{2B}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}$$

som er identisk med uttrykkekt for lastkontroll. Følgelig gir definisjonen av G samme resultat om en betrakter infinitesimal sprekkvekst under lastkontroll eller forskyvningskontroll.

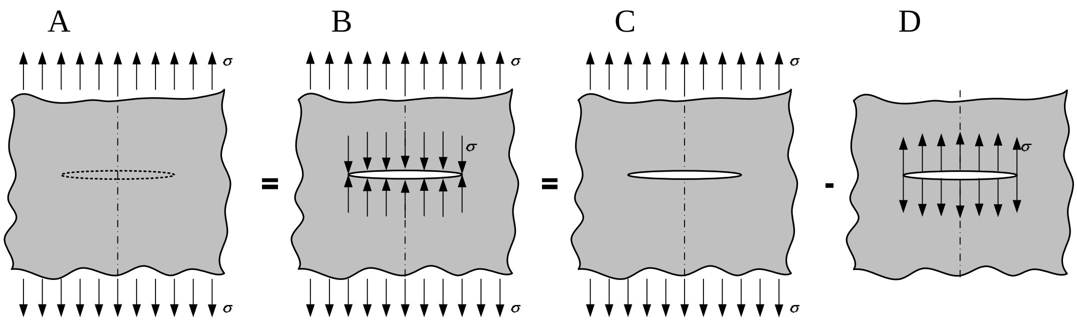
Oppgave 2 (Superposisjon, *K*, *G*)

a) En stor plate med sentersprekk er belastet med en homogen én-akset spenningen σ som vist i figuren under til venstre. Hva er uttrykket for spenningsintensitets-faktoren K_I for denne geometrien?



$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$$

b) Figuren over til høyre er av samme geometri, men spenningen σ er pålagt sprekkflatene direkte. Anvend superposisjonsprinsippet til å vise at K_I er lik for begge konfigurasjoner.



$K_I = 0$ $\quad$ $K_I = 0$ $\quad$ $K_I = K_I^{(C)}$ $\quad$ $K_I = K_I^{(D)}$

A: Ingen sprekk. Derfor ingen spenningsintensitet ved den tenkte sprekkspissen. (Spenningen langs den tenkte sprekken er lik den ytre spenningen.)

B: Sprekken er innført, men spenningen ved den tenkte sprekken ved A (atombindingene) er erstattet av nøyaktig like store pålagte spenninger. Derfor åpner sprekken seg ikke og spenningsintensitetsfaktoren er forstsatt lik null.

C: Som for B men kun med den ytre spenningen.

D: Som for B men kun med spenningene pålagt sprekken. Videre er spenningsfeltet snudd og derfor også fortegnet endret til minus.

Av dette følger:

$$0 = K_I^{(C)} - K_I^{(D)} \quad \Rightarrow \quad K_I^{(C)} = K_I^{(D)}$$

c) Du får opplyst at platen er forholdsvis tynn, av stål (E=2.1·10^5 N/mm^2) og har bruddseighet G_c=15 N/mm. Sprekklengden er 8mm. Beregn kritisk spenningen ved brudd?

Ved plan spenning (tynn plate) har vi:

$$G = \frac{K_I^{\,2}}{E}$$

og spenningsintensiteten for denne geometrien er gitt i deloppgave a). Vi får da

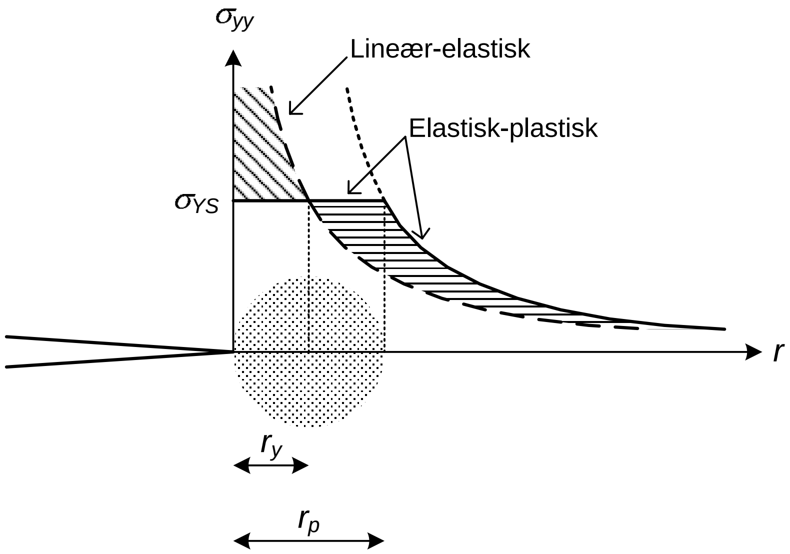
$$G = \frac{\sigma^2 \pi a}{E}$$

Ved brudd har vi $G = G_c$ og kan betegne den kritiske spenningen σ_c som da blir:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{EG_c}{\pi a}} = \sqrt{\frac{2.1 \cdot 10^5 \times 15}{\pi\, 4}} = 500.7 \text{ N/mm}$$

Oppgave 3 (Plastisk sone)

a) Utbredelsen av den plastiske sonen ved sprekkspissen ble anslått av Irwin ved å betrakte spenningsfordelingen foran sprekkspissen under tilnærmet lineær-elastiske forhold. Vis hvilke resonnementer Irwin gjorde.



Irwin resonerte at spenningen σ_{yy} foran sprekkspissen ikke kunne overstige materialets flytegrense σ_{YS}. Derfor måtte også spenningsfordelingen utledet ved LEFM trunkeres ved flytegrensen. Men for å opprettholde likevekten tenkte han seg at spenningsfordelingen under σ_{YS} velle bli forskjøvet slik at flytesonen r_y utvides til r_p. Likevekt opprettholdes når det skraverte arealet over σ_{YS} (spenningene som ”tas bort”) er like stort som det andre skraverte arealet (spenningene som ”legges til).

(Oppgaven er med dette besvart, men utledningen videre er som følger:)

For LEFM har vi:

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

Arealet som tas bort blir dermed arealet under hele LEFM-kurven ut til r_p minus rektangelet under σ_{YS}:

$$A_1 = \int_0^{r_y} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \mathrm{d}r - \sigma_{YS} r_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} 2\sqrt{r_y} - \sigma_{YS} r_y$$

Dette kan forenkles ved å innføre betingelsen at $\sigma_{yy} = \sigma_{YS}$ for $r = r_y$ for den lineærelastiske kurven slik at

$$\sigma_{YS} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_y}} \quad \Rightarrow \quad \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} = \sigma_{YS}\sqrt{r_y}$$

som gir

$$A_1 = \sigma_{YS} r_y$$

Arealet som legges til er i realiteten et rektangel fordi det utgjøres av to kurver som er parallellforskjøvet:

$$A_2 = \sigma_{YS}\left(r_p - r_y\right)$$

Liket mellom de to arealene gir som et interessant mellomresultat:

$$\sigma_{YS} r_y = \sigma_{YS}\left(r_p - r_y\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{r_p = 2r_y}$$

Hvis vi løser betingelsen over m.h.t. r_y får vi:

$$r_y = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{r_p = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}}\right)^2}$$

b) Vis hvordan Irwins resultat kan benyttes til å korrigere K_I for effekt av den plastiske sonen. Hvor stor sprekk kan tolereres for situasjonen i Oppgave 2c) når materialets flytegrense er 690 N/mm^2?

Vi tenker oss en "effektiv sprekk" med sprekkspissen ved $r = r_y = r_p/2$. Denne sprekken vil ligne det lineærelastisk tilfellet i og med at den har en spenningsfordeling foran seg som for LEFM når vi ser bort fra den plastiske sonen umiddelbart foran sprekkspissen.

Vi definerer derfor den effektive sprekklengden som

$$a_{eff} = a + \frac{r_p}{2}$$

og

$$K_{eff} = Y\left(a_{eff}/W\right)\sigma\sqrt{\pi a_{eff}}$$

Ved brudd er $K_{eff} \geq K_{Ic}$.

$$K_{eff} = K_{Ic} = \sqrt{EG_c} = \sqrt{2.1 \cdot 10^5 \times 15} = 1774.8 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-3/2}$$

Med Y=1 har vi også at:

$$K_{eff} = \sigma\sqrt{\pi a_{eff}} \;\Rightarrow\; a_{eff} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{eff}}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1774.8}{500.7}\right)^2 = 4.0 \text{ mm} \text{ (altså lik } a \text{ i oppg. 2c)}$$

I første iterasjon antar vi at $K_I \approx K_{eff}$ og får:

$$r_p = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}}\right)^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\pi}\left(\frac{1774.8}{690}\right)^2 = 2.11 \text{ mm}$$

$$a = a_{eff} - \frac{r_p}{2} = 4.0 - \frac{2.11}{2} = 2.94 \text{ mm}$$

I andre iterasjon oppdaterer vi K_I med forlige anslag på a og beregner ny a:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} = 500.7 * \sqrt{\pi \cdot 2.94} = 1523.4 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-3/2}$$

$$r_p = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{\pi}\left(\frac{1523.4}{690}\right)^2 = 1.55\,\text{mm}$$

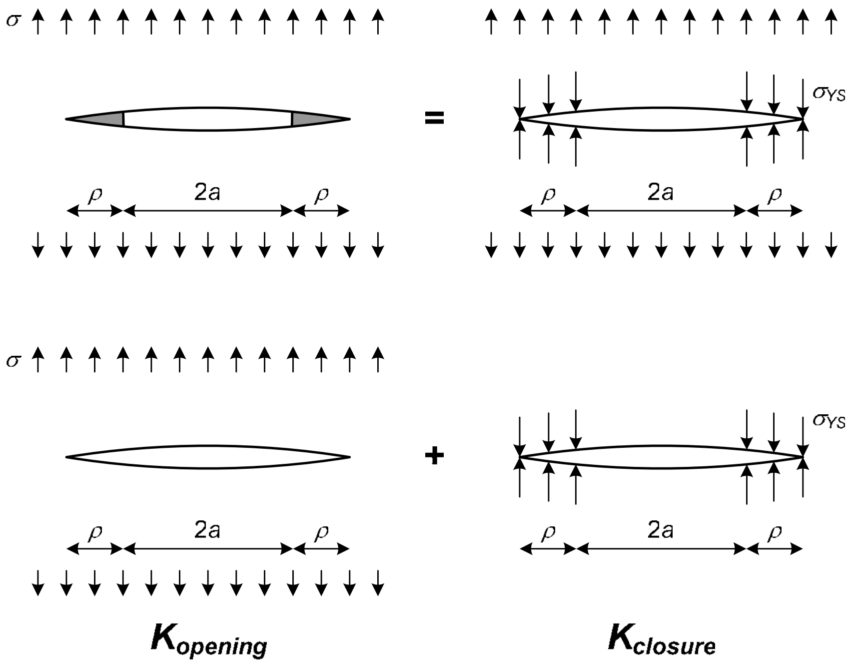
$$a = a_{eff} - \frac{r_p}{2} = 4.0 - \frac{2.11}{2} = 3.22\,\text{mm}$$

Flere iterasjoner gir a = 3.15, 3.17, 3.17, 3.17 → konvergerer mot 3.17 mm.

<u>2*a* = 6.3 mm</u>

c) Hvis hvordan utbredelsen av den plastiske sonen utledes i følge Dugdale-modellen (”strip-yield”-modellen).

Dugdale tenkte seg at det i Modus I vil bre seg en flytesone fra sprekkspissen som et bånd (”strip”) i samme plan som sprekken, og at lengden ρ av denne sonen øker med belastningen inntil den har bredt seg gjennom hele legemet. Lengden av denne flytesonen bestemte han ved å benytte superposisjon av kjente løsninger for K_I. Han tenkte seg da at den fysiske sprekken pluss flytesonen utgjør en tenkt sprekk. Han betraktet materialet i flytesonen som noe som trakk på sprekkens flate med en spenning lik flytegrensen. Altså kunne han erstatte flytesonen med et tenkt pålagt spenningsfelt σ_{YS} som vist under. Som videre vist har han da en sprekk med to ulike pålastninger som i følge superposisjonsprinsippet kan deles opp i to separate tilfeller med kjente uttrykk for K_I.; $K_{opening}$ og $K_{closure}$.



Ved spissen av den tenkte sprekken har vi ingen singularitet (CTOD=0), og spenningsintensiteten er derfor null. Altså har vi:

$$K_{opening} + K_{closure} = 0$$

som med kjente løsninger for $K_{opening}$ og $K_{closure}$ kan løses for ρ.

(Dette gir svar på oppgaven som demonstrerer forståelsen av modellen. Videre utledning av uttrykket for ρ kan være en god øvelse, men vil være i overkant å forvente ved eksamen.)

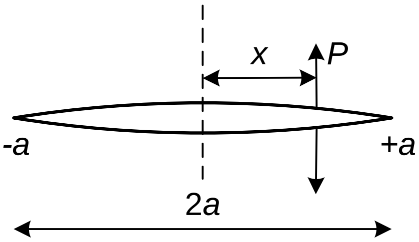
$K_{opening}$ er gitt av den velkjente løsningen

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$$

hvor a erstattes av $a+\rho$ som gir

$$K_{opening} = \sigma\sqrt{\pi(a+\rho)}$$

$K_{closure}$ kan finnes ved å integrere løsningen for en sprekk med enkelt last P på sprekkflaten:



$$K_I(+a) = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \quad , \quad K_I(-a) = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

hvor a erstattes av $a+\rho$ og P erstattes av $-\sigma_{YS}\,\mathrm{d}x$. Symmetri gir da:

$$K_{opening} = \int_0^{a+\rho} \frac{-\sigma_{YS}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi(a+\rho)}}\sqrt{\frac{a+\rho+x}{a+\rho-x}} + \int_0^{a+\rho} \frac{-\sigma_{YS}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi(a+\rho)}}\sqrt{\frac{a+\rho-x}{a+\rho+x}}$$

som løses til

$$K_{opening} = -2\sigma_{YS}\sqrt{\frac{a+\rho}{\pi}}\arccos\left(\frac{a}{a+\rho}\right)$$

Ved å sette summen av $K_{opening}$ og $K_{closure}$ li null får vi:

$$\frac{a}{a+\rho} = \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}}\right)$$

Denne kan forenkles ved å anvende rekkeutvikling til en Taylor-serie for cosinus-funsjoner:

$$\frac{a}{a+\rho} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}}\right)^6 + \cdots$$

og beholde de to første leddene. Løst for ρ får vi da:

$$\rho = \frac{\pi^2\sigma^2 a}{8\sigma_{YS}^{\ 2}}$$

Her kjenner vi igjen parametrene som inngår i uttrykket for K_I for den *fysiske* sprekken. Uttrykket omformes dermed til:

$$\underline{\rho = \frac{\pi}{8}\left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}}\right)^2}$$