Knekningsberegning ved bruk av differensialligning

Kritisk last for søyler og rammer

❑ Eksempler på søyleknekning

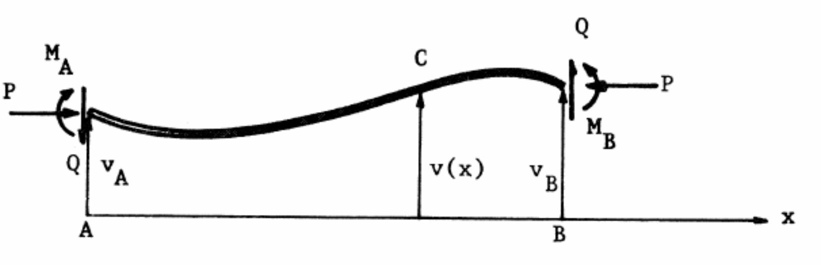
Differensialligning for en bjelke med aksialkraft men uten uten tverrlast:

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{P}{EI}v=\frac{1}{EI}\left(Pv_A+M_A-Qx\right)$$

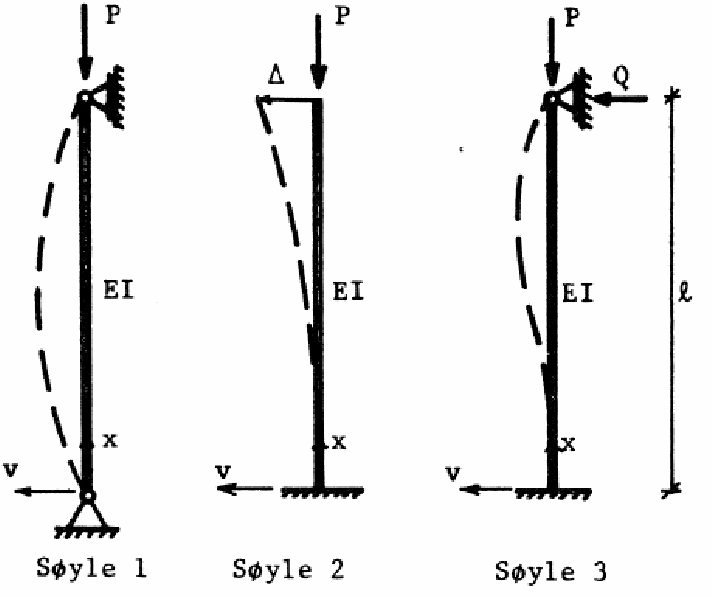
For $P>0$ (trykk) har denne løsningen:

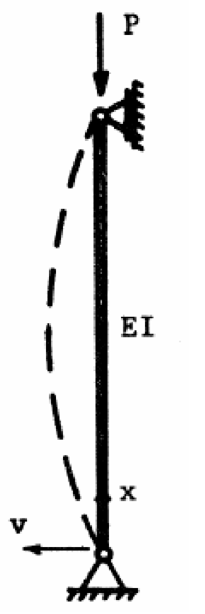
$$v(x)=C_1\sin kx+C_2\cos kx+\frac{1}{P}\left(Pv_A+M_A-Qx\right)$$

hvor $k^2=\dfrac{P}{EI}$



Vi ser på 3 tilfeller:





Søyle 1

$$v_A = 0 \ , \ M_A = 0 \ , \ Q = 0$$

Likevekt av de horisontale kreftene gir $Q = 0$

Disse betingelsene gir

$$v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

Randbetingelser: $v(0) = C_2 = 0$

$$v(\ell) = C_1 \sin k\ell = 0$$

Da er enten $v(x) = 0$ eller $\sin k\ell = 0$

dvs. $k\ell = n\pi \ , \ n = 1, 2, 3, \ldots$

og $P = k^2 EI = \dfrac{n^2 \pi^2 EI}{\ell^2}$

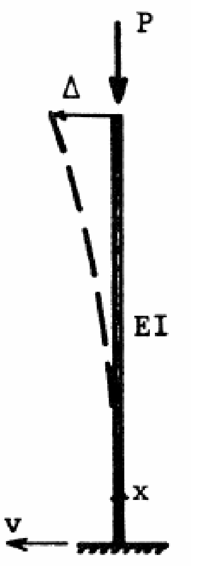
Den laveste knekklasten får vi for $n = 1$:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = P_E$$

- kalles ofte for ***Eulerlasten***.

Tilhørende knekkform er sinus***halv***bølge:

$$v(x) = C_1 \sin \pi \frac{x}{\ell}$$



Søyle 2

Ved innspenningen er

$$v_A = 0 \;,\; M_A = P\varDelta \;,\; Q = 0$$

$\varDelta$ er tverrforskyvningen i toppen.

Vi har nå:

$$v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{1}{P}\left(P\varDelta\right)$$

Nå er det 3 konstanter så vi må benytte 3 randbetingelser:

$$v(0) = C_2 + \varDelta = 0 \;\rightarrow\; C_2 = -\varDelta$$

$$v'(0) = C_1 k = 0 \;\rightarrow\; C_1 = 0$$

$$v(l) = C_1 \sin k\ell + C_2 \cos k\ell + \varDelta = \varDelta$$

Den siste gir $\quad \varDelta(1 - \cos k\ell) = \varDelta$

dvs. $\varDelta = 0$ eller $\cos k\ell = 0$

Denne betingelsen er oppfylt for

$$k\ell = \frac{\pi}{2} + n\pi \;,\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

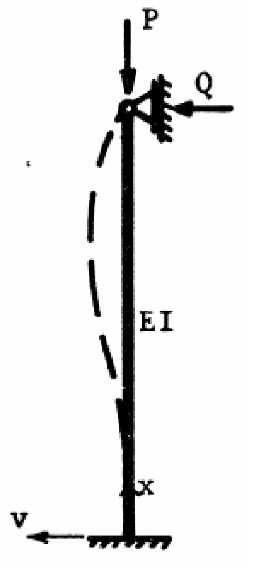
Den laveste knekklasten får vi for $n = 0$:

$$P_{kr} = k^2 EI = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{(2\ell)^2} = \frac{P_E}{4}$$

Tilhørende knekkform er sinus***kvart***bølge:

$$v(x) = C_1 \sin \pi \frac{x}{2\ell}$$

Søyle 3



Skjærkraften er ikke lik null men

$$M_A = Q\ell$$

Dessuten er $v_A = 0$ slik at

$$v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{Q}{P}(\ell - x)$$

$$v'(x) = C_1 k \cos kx - C_2 k \sin kx - \frac{Q}{P}$$

Randbetingelese er:

$$v(0) = C_2 + \frac{Q\ell}{P} = 0 \;\rightarrow\; Q = -\frac{C_2 \ell}{P}$$

$$v'(0) = C_1 k - \frac{Q}{P} = C_1 k + \frac{C_2}{P} = 0 \;\rightarrow\; C_2 = -klC_1$$

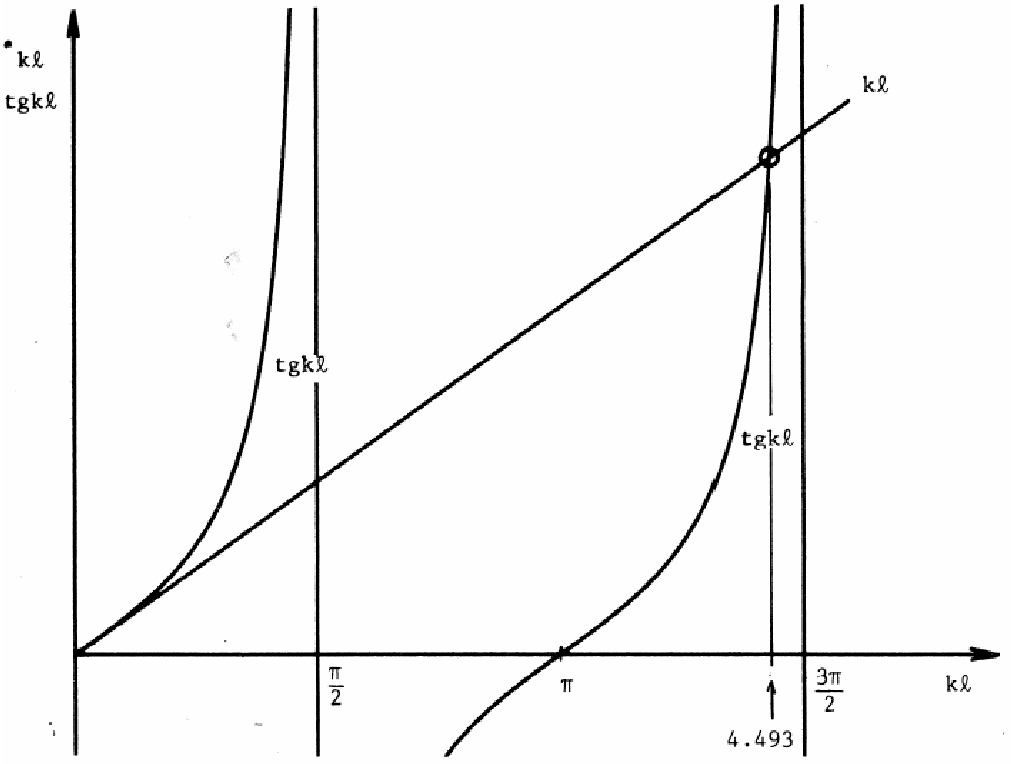
$$v(l) = C_1 \sin k\ell + C_2 \cos k\ell = C_1(\sin k\ell - k\ell \cos k\ell) = 0$$

Ikke-triviell løsning krever $\quad \sin k\ell - k\ell \cos k\ell = 0$

dvs. $\quad \tan k\ell = k\ell$

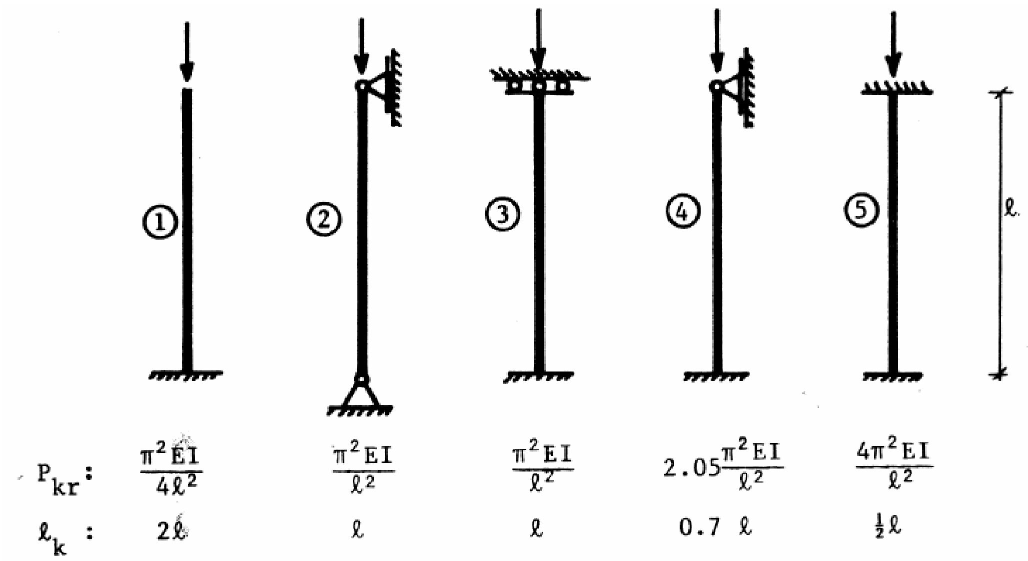
Dette er en transcendent ligning som ikke kan løses analytisk.

Løses ved å finne skjæringspunktet grafisk (eller ved å bruke numerisk iterasjon):



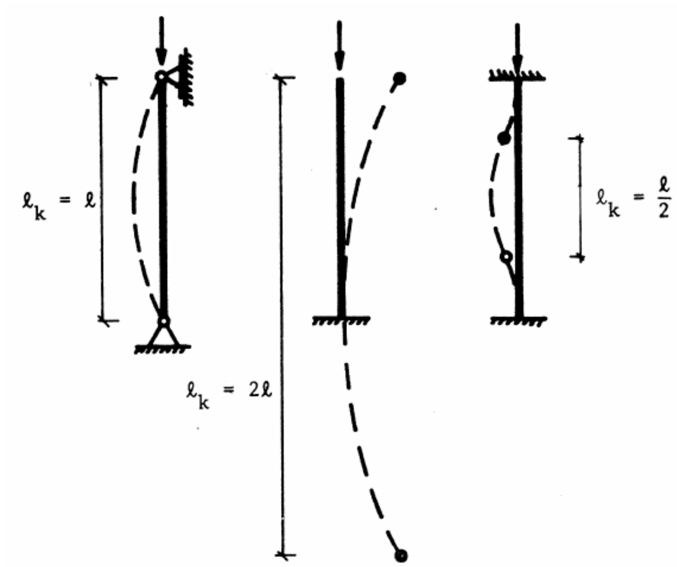
$$k\ell = 4.493 \;\rightarrow\; P_{kr} = \frac{20.19EI}{\ell^2} = 2.045\frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.699\ell)^2}$$

Oversikt over de vanligste tilfellene for søyler:



Her vises også knekklengden ℓ_k = lengden mellom to infleksjonspunkter (tilsvarer en halv sinusbølge)

Knekklengden defineres som:



$$\ell_k = \ell \sqrt{\frac{P_E}{P_{kr}}}$$

hvor

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

Den kritiske lasten kan uttrykkes som:

$$P_{kr} = P_E \frac{\ell^2}{\ell_k^{\,2}} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_k^{\,2}}$$

Praktisk kapasitetskontroll av trykkstaver

Forenklede regler i forskrifter

Tverrsnittsarealets momentarm (treghetsradius):

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \text{eller} \quad I = i^2 A$$

hvor A = tverrsnittsarealet og I = tversnittets kvadratiske arealmoment

Slankhet: $$\lambda = \frac{\ell_k}{i}$$

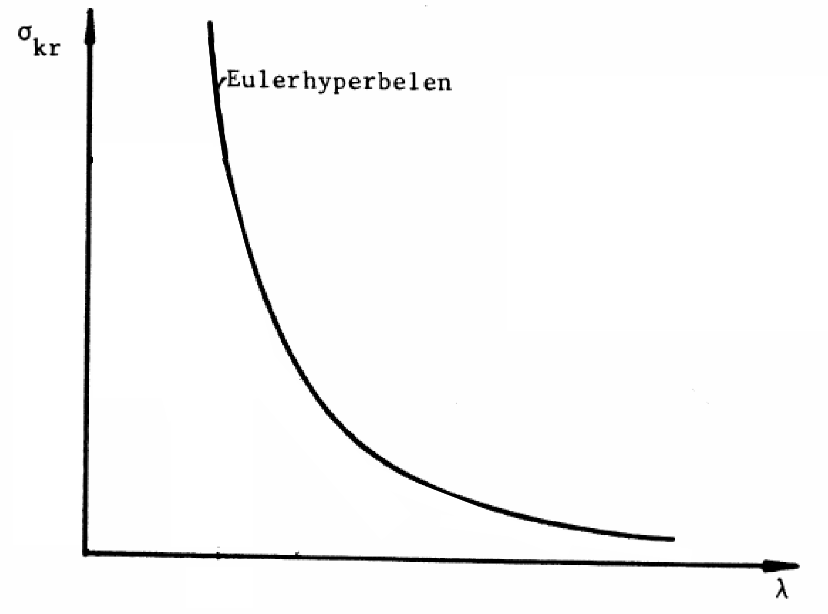
Knekklengden uttrykkes ofte som $\ell_k = \beta \ell$

hvor β er en faktor avhengig av randbetingelsene.

Kritisk spenning – spenning som tilsvarer kritisk last, forutsatt at aksialkraften er jevnt fordelt over tverrsnittet (sentrisk kraft):

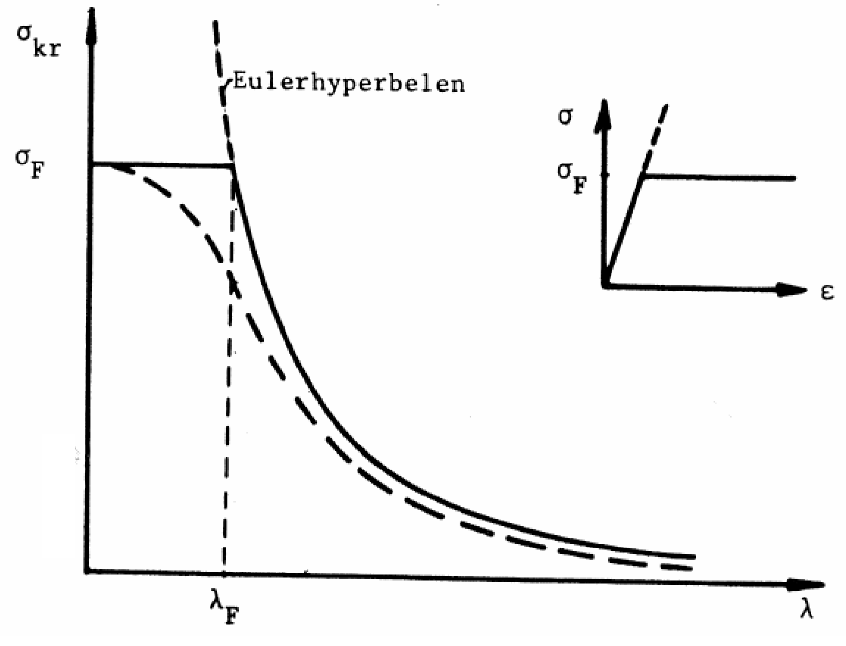
$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A\ell_k^2} = \frac{\pi^2 Ei^2}{\ell_k^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

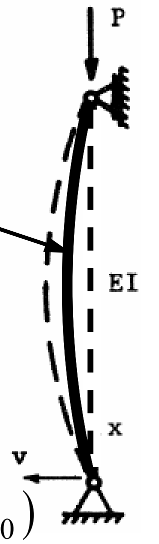
Dette gir Euler-hyberbelen når σ_{kr} er plottet mot λ:



Kurven representerer den kritiske spenningen for indeell sentrisk trykk på en søyle med ideelt elastisk materiale.

For et ideelt elastisk-plastisk materiale kan spenningen nå flytegrensen σ_F før staven knekker. Da er σ_F en øvre grense for σ_{kr}. Avvik fra de idealiserte forutsetningene (formfeil ol.) kan også redusere σ_{kr}.





❑ Søyle med formfeil *(ikke i boken)*

Fritt opplagt søyle med initiell form $v_0(x) = a\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$

Differentialligning for perfekt søyle:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = \frac{1}{EI}\left(Pv_A + M_A - Qx\right)$$

Men nå må vi erstatte $M = EI\frac{d^2v}{dx^2}$ med $M = EI\frac{d^2}{dx^2}\left(v - v_0\right)$

slik at differentialligningen er endret til

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(v - v_0\right) + \frac{P}{EI}v = \frac{1}{EI}\left(Pv_A + M_A - Qx\right)$$

Som for søyle 1 er $v_A = 0$, $M_A = 0$, $Q = 0$

Dette gir $$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = -a\frac{\pi^2}{\ell^2}\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

Homogenløsningen er $v_h(x) = C_1\sin kx + C_2\cos kx$

En partikulær løsning er $v_p(x) = C_3\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$

hvor $C_3\left(-\frac{\pi^2}{\ell^2} + k^2\right) = -a\frac{\pi^2}{\ell^2}$ dvs.

$$C_3 = -a\frac{\frac{\pi^2}{\ell^2}}{\left(-\frac{\pi^2}{\ell^2} + k^2\right)} = a\frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}}$$

Totalløsningen er dermed

$$v(x) = v_h(x) + v_p(x) = C_1\sin kx + C_2\cos kx + C_3\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

Randbetingelser: $v(0) = C_2 = 0$ og $v(\ell) = C_1\sin k\ell = 0$

Vi begrenser interessen til oppførselen mens $0 < P < P_E$ slik at

$$\sin k\ell \neq 0 \qquad \text{og} \qquad C_1 = 0$$

Da er

$$v(x) = v_p(x) = \frac{1}{1 - \dfrac{P}{P_E}} a \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

Den initielle formen er under aksialkraften P forstørret med faktoren

$$\frac{1}{1 - \dfrac{P}{P_E}}$$

Fra nå av skriver vi $\bar{\sigma} = \dfrac{P}{A}$ og $\sigma_E = \dfrac{P_E}{A}$

Normalspenningen i søylen består av to komponenter:

Fra aksialkraften $\sigma_a = \bar{\sigma}$

Bøyespenning fra momentet $\sigma_b = \dfrac{My}{I} = \dfrac{Pvy}{Ai^2} = \bar{\sigma}\dfrac{vy}{i^2}$

Her er y-koordinaten den for det punktet i tverrsnittet hvor spenningen beregnes (målt i forhold til arealsenteret)

Den største trykkspenningen gis ved å kombinere σ_a og σ_b på det punktet hvor både v og y er størst, dvs. hvor

$$v = v(\ell/2) = \frac{a}{1 - \dfrac{P}{P_E}} = \frac{a}{1 - \dfrac{\bar{\sigma}}{\sigma_E}} \qquad \text{og} \qquad y = c$$

hvor c er y-koordinaten for det ytterste punktet i tverrsnittet på den konkave siden av søylen.

Da er $\sigma_{b\max} = \bar{\sigma}\dfrac{\eta}{1 - \dfrac{\bar{\sigma}}{\sigma_E}}$ hvor $\eta = \dfrac{ac}{i^2}$

Materialet begynner å flyte når den kombinerte spenningen er lik flytespenningen:

$$\sigma_F = \sigma_a + \sigma_{b\max} = \bar{\sigma}\left(1 + \frac{\eta}{1 - \dfrac{\bar{\sigma}}{\sigma_E}}\right)$$

Dette gir en kvadratisk ligning:

$$\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}\left[\sigma_F + (1+\eta)\sigma_E\right] + \sigma_F\sigma_E = 0$$

som har løsning

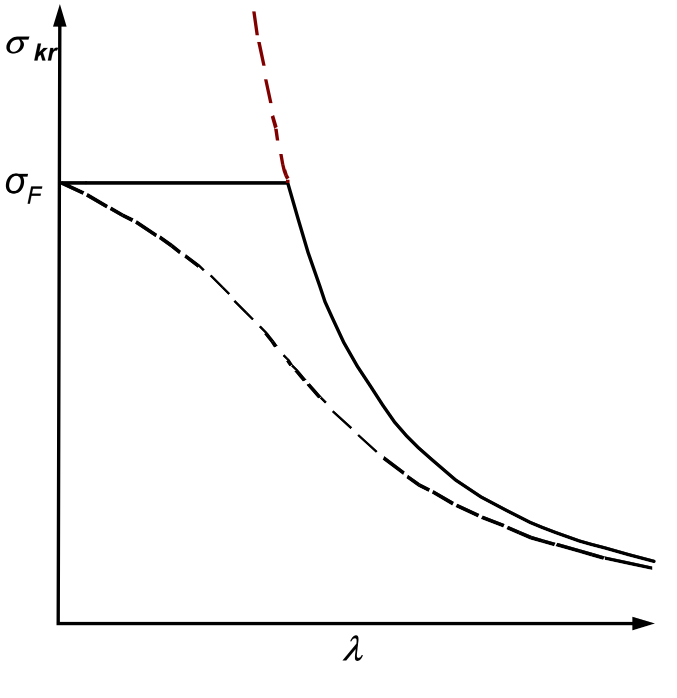
$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\sigma_F + (1+\eta)\sigma_E\right] - \sqrt{\frac{1}{4}\left[\sigma_F + (1+\eta)\sigma_E\right]^2 - \sigma_F\sigma_E}$$

Vi tar kun minus-fortegn siden vi er interessert i den minste roten. Denne ligningen er kalt for Perrys formel.

Parameteren η viser formfeilens amplityde i forhold til tverrsnittet. Robertson fant ut at han fikk god overenstemmelse med målte laster ved kollaps av en del stålsøyler ved å sette inn

$$\eta = 0.003\lambda$$

i denne formelen. Diverse andre empiriske forhold er blitt etablert i senere tid som passer til enkelte typer eller grupper av profiler.



Redusert slankhet (brukt f.eks. i NS 3472 for stålkonstruksjoner):

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_F} = \frac{\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_F}{E}}$$

hvor λ_F beregnes av

$$\sigma_F = \frac{\pi^2 E}{\lambda_F^2} \rightarrow \lambda_F = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_F}}$$

Dette fører til

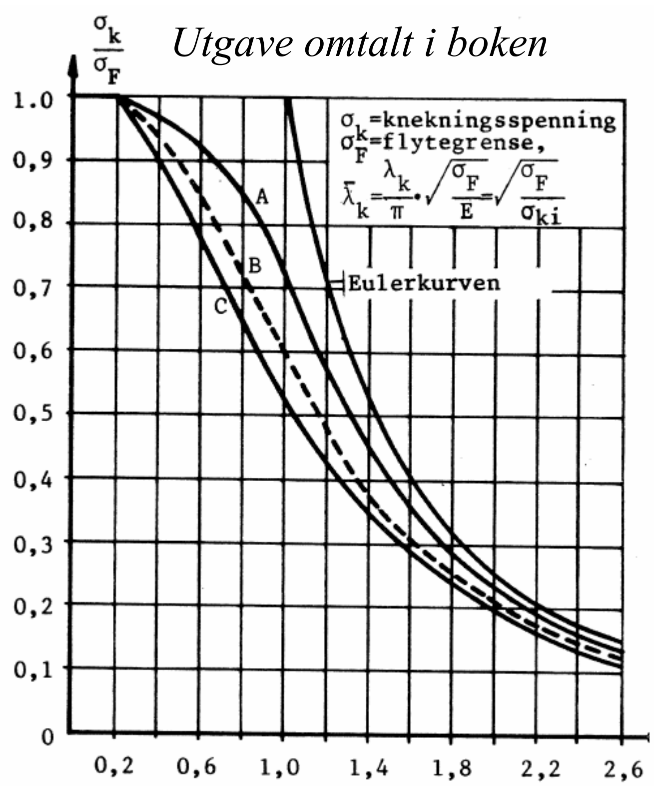
$$\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_F} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2}$$

Nå kan knekkurven tegnes uavhengig av flytegrensen og E-modulen.

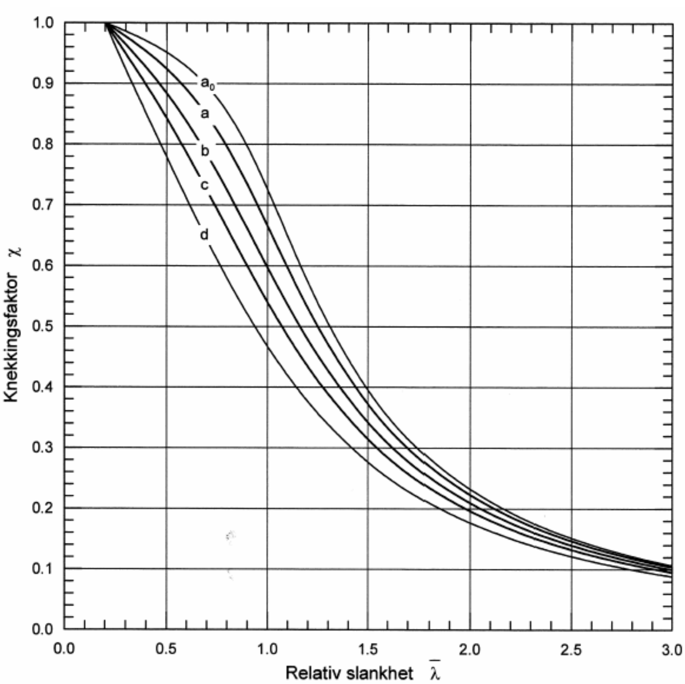
Knekkurver fra NS 3472

Disse er redusert i forhold til den ideelle kurven for å ta hensyn til avvik som formfeil, egenspenninger, osv. Disse er gitt for forskellige tverrsnittsformer.

Utgave omtalt i boken



Nåværende utgave (2001)



NS 3472 Stålkonstruksjoner. Beregning og dimensjonering

Behandler sammensatte knekningstilfeller som kombinasjon av enkelttilfeller ved bruk av interaksjonsformler av formen

$$\sum_i \frac{B_i}{C_i} \le 1$$

hvor B_i er en beregningsmessig påkjenning og C_i er tilsvarende kapasitet nåt B_i virker alene.

Ved kombinert moment og aksialkraft forstørres momentpåkjenning beregnet etter lineær teori med en faktor

$$\frac{1}{1 - \frac{P}{P_{kr}}}$$

hvor P_{kr} beregnes etter angitte regler.

NS 3473 Prosjektering av betongkonstruksjoner

Slanke trykkstaver kontrolleres for lastvirkninger bergnet etter 2. ordens teori og med ikkelineære materialegenskaper for betong og armering.

Oftest brukes forenklede beregningsmetoder der bjelkene dimensjoneres hver for seg. Snittkreftene beregenes i første omgang etter 1. ordens teori, og forstørring med faktor som ovenfor gir dimensjonerende lastvirkning.

Tillegg T5.5 til NS 3473 (nå erstattet av Tillegg A12.2):

Dimensjonerende moment settes like momentkapasiteten M_d

$$M_d = \frac{M_\gamma}{1 - \dfrac{P}{P_{kr}}}$$

hvor P og M_γ er aksialkraft og moment beregnet etter 1. ordens teori.

Da er $$M_d = M_\gamma + \frac{P}{P_{kr}} M_d = M_\gamma + M_e$$

M_e er det såkalte tilleggsmomentet: $$M_e = \frac{P}{P_{kr}} M_d$$

M_d uttrykkes ved maksimalt tillatt krumning og P_{kr} ved en knekklengde

$$M_d = EI\kappa_d \quad \text{og} \quad P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_k^2}$$

Dermed blir $$M_e = P\frac{\ell_k^2}{\pi^2}\kappa_d \cong P\frac{\ell_k^2}{10}\kappa_d$$

- **Southwells metode for estimering av elastisk kritisk last fra en test på en søyle *(ikke i boken)***

Søyle med formfeil: $v_0(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$

Forskyvninger under aksialkraft *P:* $v(x) = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}} a \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$

Forskyvning ved midtpunktet målt fra initiell tilstand:

$$\delta = v(\ell/2) - v_0(\ell/2) = a - \frac{a}{1 - \frac{P}{P_E}} = -a \frac{\frac{P}{P_E}}{1 - \frac{P}{P_E}} = -a \frac{P}{P - P_E}$$

Dette gir $\frac{\delta(P - P_E)}{P} = -a$ eller $\frac{\delta}{P} = \frac{1}{P_E}(\delta + a)$

Hvis δ/P plottes mot δ er resultatet an rett linje med stigning $1/P_E$.

I praksis kan dette brukes for en hvilken som helst konstruksjon hvor den initielle feilformen ligner noe på knekkformen, så lenge den målte forskyvningen er representativ for denne formen. Kurven er da en tilnærming til en rett linje med stigning $1/P_{kr}$ og tilnærmingen blir bedre som *P* økes mot den kritiske lasten P_{kr}.