

**SLANKE BETONGKONSTRUKSJONER –  
Forenklet og optimal dimensjonering  
med hensyn til sikkerhet og økonomi**

16–18 november 1998

**TRYKKSTAVER I RAMMESYSTEMER**

(4)

Foreleser

Professor dr. Jostein Hellesland,  
Avdeling for mekanikk, Universitetet i Oslo

Ettertrykk kun etter skriftlig tillatelse fra NIF og forfatteren.

**Ved henvisning til dette kurskompendiet oppgis:**

Hellesland, J., "Trykkstaver i rammesystemer", NIF kurs: "Slanke betongkonstruksjoner – Forenklet og optimal dimensjonering med hensyn til sikkerhet og økonomi", Norske Sivilingeniørers Forening, Oslo, november 1998.

# Innhold

1	Innledning . . . . .	3
2	Andre ordens elastisk teori . . . . .	3
	2.1 Generelt . . . . .	3
	2.2 Søyrens utbøyningsform . . . . .	4
	2.3 Momentforløp og maksimalmoment . . . . .	5
	2.4 Stavendemomenter . . . . .	6
	2.5 Momentberegning av rammehjørne – Eksempel . . . . .	9
	2.6 Stivhetsavhengighet . . . . .	11
	2.7 Superposisjonsprinsippet . . . . .	12
3	Kritisk last og knekkengde . . . . .	12
	3.1 Kritisk last . . . . .	12
	3.2 Knekkengde for søyle med vilkårlig innspenning . . . . .	13
4	Tilnærmet elastisk beregning . . . . .	13
	4.1 Generelt . . . . .	13
	4.2 Uforskyvelig søyle . . . . .	14
	4.3 Uforskyvelig søyle – Sammenligning med nøyaktig teori . . . . .	19
	4.4 Fritt forskyvelig søyle . . . . .	21
5	Rammer . . . . .	21
	5.1 Generelt . . . . .	21
	5.2 Uforskyvelig (fastholdt) ramme . . . . .	22
	5.3 Forskyvelig ramme – Tilleggsmomentformulering . . . . .	22
	5.4 Forskyvelig ramme – Momentforstørrelsesmetode . . . . .	24
	5.5 Horisontal- og vertikalbelastet forskyvelig ramme . . . . .	27

6 Stivheter . . . . .	28
Litteratur . . . . .	29

# 1 Innledning

Det finnes forskjellige metoder for beregning av lastvirkninger (snittkrefter og forskyvninger) i betongkonstruksjoner med slanke konstruksjonsdeler. Disse tar i forskjellig grad hensyn til delmaterialenes ikkelineære materialelegenskaper og til geometrisk ikkelinearitet (2. ordens lastvirkninger fra forskyvningene).

Metoder som baserer seg på

1. linearisert 2. ordens elastisk teori, med ekvivalente "elastiske" stivheter (sekantstivheter) som er representative for konstruksjonsdelenes utnyttelse, Fig. 1, og på
2. beregning av 1. ordens lastvirkninger etter 1. ordens (konvensjonell) teori og påfølgende forenklet beregning av 2. ordens lastvirkninger

vil bli behandlet. Sammenhengen mellom metodene vil bli forsøkt påvist for å belyse hvordan en del av forenklingene i metoder i den siste gruppen framkommer, og dermed for å gi en bedre forståelse av begrensninger og muligheter bruk av slike metoder har.

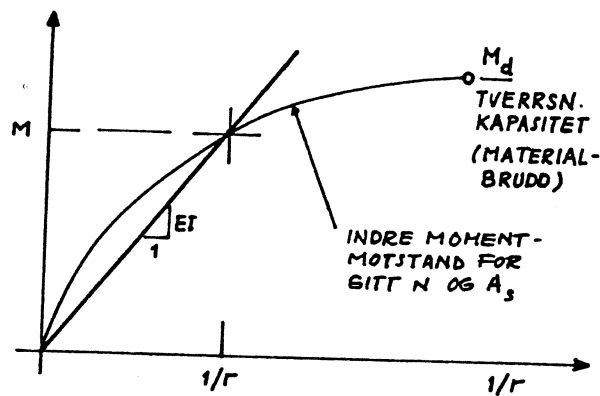


Fig. 1. Momentforløp som funksjon av krumningen

## 2 Andre ordens elastisk teori

### 2.1 Generelt

Utbøyningsform og stavendekrefter for en enkeltstående søyle kan enkelt bestemmes fra søylens differensialligning. Løsningen av denne vil gi summen av 1. og 2. ordens effekter.

Hensikten med dette kapitlet er å utvikle et beregningsverktøy som egner seg for håndregning etter forskyvnings-metoden og varianter av denne såsom momentfordelingsmetoden (Cross-metoden).

## 2.2 Søylen utbøyningsform

Under forutsetning om at forskyvningene er små ( $(y')^2 \ll 1$ ) kan differensialligningen for søylen med konstant elastisk bøyestivhet  $EI$  i Fig. 2a gis ved

$$y'' = -M(x)/EI \quad (1)$$

hvor momenter  $M = M(x)$  kan finnes fra en enkel likevektsbetraktning av den utbøyde søylen. Momentlikevekt om ett snitt i avstand  $x$  (Fig. 2b) gir

$$M(x) = M_B + (-Ny) + Vx \quad (2)$$

Lign. 2 innsatt i Lign. 1 gir

$$y'' + k^2 y = -(M_B + Vx)/EI \quad (3)$$

hvor

$$k^2 = -N/EI \quad (4)$$

For  $N < 0$  (trykkraft) har Lign. 3 homogenløsningen

$$y_h = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad (5)$$

og partikulærløsningen

$$y_p = -(M_B + Vx)/(-N) \quad (6)$$

hvor skjærkraften også kan gis ved

$$V = -(M_A + M_B + (-Na))/L \quad (7)$$

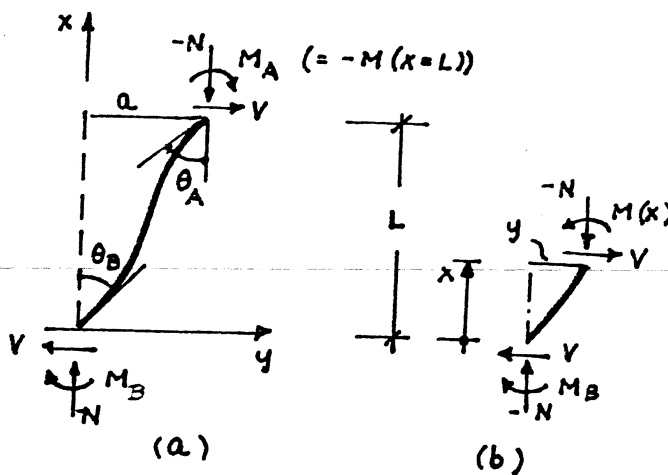


Fig. 2. Utbøyd søyle - (a) Stavendekrefter, (b) Snittkrefter

Total søyleforskyvning er da gitt ved summen av homogen- og partikulær-løsningen

$$y = y_h + y_p \quad (8)$$

Konstantene  $C_1$  og  $C_2$  kan finnes fra grensebetingelsene  $y(0) = 0$  og  $y(L) = a$  ved søyle-ender. For  $N > 0$  (strekraft) gjelder fortsatt Lign. 9 dersom sin og cos byttes ut med sinh og cosh.

Endelig utbøying kan etter en del mellomregning uttrykkes ved

$$y = \frac{ax}{L} + \frac{M_B}{-N} \left[ \frac{\bar{r} - \cos kL}{\sin kL} \sin kx + \cos kx + (1 - \bar{r}) \frac{x}{L} - 1 \right] \quad (9)$$

Her er forholdet  $\bar{r}$  mellom endemomentene innført:

$$\bar{r} = -M_A/M_B \quad (10)$$

For endemomentene er det valgt å definere disse som positive når de dreier med urviseren (Fig. 2a). Dersom et av momentene virker motsatt av det som er vist i figuren blir altså momentforholdet ( $\bar{r}$ ) positivt.

### 2.3 Momentforløp og maksimalmoment

Forutsatt at søylens utbøying som funksjon av stavendemomentene er kjent, kan momentet i et vilkårlig snitt bestemmes fra Lign. 1 og 9. To gangers derivering av Lign. 9 og innsetting i Lign. 1 gir

$$M(x) = M_B \left[ \frac{\bar{r} - \cos kl}{\sin kl} \sin kx + \cos kx \right] \quad (11)$$

Positivt snittmoment finnes i det snittet ( $x = x_m$ ) hvor  $dM(x)/dx = 0$ . Dette gir

$$\tan kx_m = \frac{\bar{r} - \cos kL}{\sin kL} \quad (12)$$

som innsatt i Lign. 11 gir følgende uttrykk for maksimalt moment

$$M_{\text{maks}} = M_B / \cos kx_m = \bar{f}_m M_B \quad (13)$$

Ved å betrakte nevneren og telleren i brøken, Lign. 12, som kortsidene i en rettvinklet trekant, kan hypotenusen uttrykkes som kvadratroten av summen av kvadratene av disse. Dermed kan "forstørrelsesfaktoren"  $\bar{f}_m$  for endemomentet også uttrykkes ved

$$\bar{f}_m = \frac{1}{\cos kx_m} = \frac{\sqrt{1 + \bar{r}^2 - 2\bar{r} \cos kL}}{\sin kL} \quad (14)$$

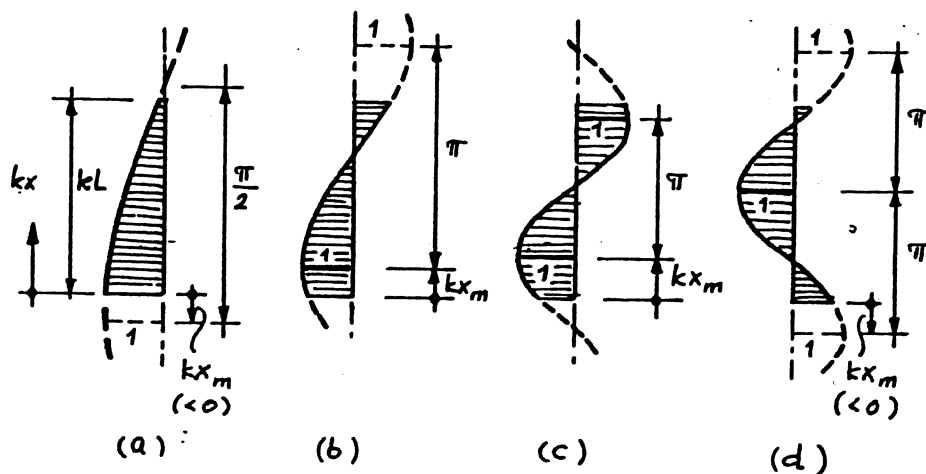


Fig. 3. Mulige momentforløp ved forskjellige aksialkraftnivåer

Typiske momentforløp er skissert i Fig. 3. Søyelengden er representert ved  $kL$  (hvor  $k = \sqrt{-N/EI}$ , Lign. 4). Dersom  $kx_m$ , som finnes ved å ta arctan til Lign. 12, eller  $kx_m + \pi$  ikke gir en maksimal "bølgeverdi" innenfor søylelengden  $kL$  betyr dette at søylens maksimale moment er gitt ved det største endemomentet (Fig. 3a). En mer detaljert diskusjon av maksimum momentberegning kan finnes i ref. 1, 2 og 3.

## 2.4 Stavendemomenter

Stavendemomentene ( $M_A, M_B$ ) som det maksimale søylemomentet foran er uttrykt ved, er normalt ikke kjent på forhånd unntatt i tilfeller med tosidig leddlagrede søyler hvor stavendemomentene er direkte påførte momenter ved staver.

Nenenfor er det vist hvordan stavendemomentene kan bestemmes når søylen er en del av en ramme. En formulering i tråd med forskyvningsmetoden legges til grunn. Det er da først ønskelig å uttrykke stavendemomenter som en funksjon av stavenderotasjoner ( $\theta_A$  og  $\theta_B$ ) og relativ stavendeforskyvning (a). Alle størrelser er definert i Fig. 2a (med positiv retning som vist).

Rotasjoner ved hver ende er gitt ved den 1. deriverte av Lign. 9, dvs.  $\theta_B = y'(0)$  og  $\theta_A = y'(L)$ .

Dersom en fra disse to resulterende ligningene løser for stavendemomentet, finnes etter en del mellomregning flg. stivhetsrelasjoner (slope-deflection equations):

$$M_A = \phi_3 \frac{4EI}{L} \theta_A + \phi_4 \frac{2EI}{L} \theta_B - \phi_2 \frac{6EI}{L^2} a \quad (15a)$$

$$M_B = \phi_3 \frac{4EI}{L} \theta_B + \phi_4 \frac{2EI}{L} \theta_A - \phi_2 \frac{6EI}{L^2} a \quad (15b)$$

Disse  $\phi$ -funksjonene, som gjerne kalles stabilitetsfunksjoner, er en funksjon av aksialkraften og kan defineres ved (4)

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \beta \cot \beta, & \beta &= \frac{kl}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_E}} \\ \phi_2 &= \frac{1}{3} \frac{\beta^2}{1-\phi_1}, & N_E &= -\pi^2 EI/L^2 \\ \phi_3 &= \frac{1}{4} \phi_1 + \frac{3}{4} \phi_2 \\ \phi_4 &= -\frac{1}{2} \phi_1 + \frac{3}{2} \phi_2, & (\phi_5 &= \phi_1 \phi_2) \\ \text{For } N = 0 & \text{ er } \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Stabilitetsfunksjonene varierer med den dimensjonsløse aksialkraften  $N/N_E$  som vist i Fig. 4, hvor også forløpet for aksialtrekk er medtatt.

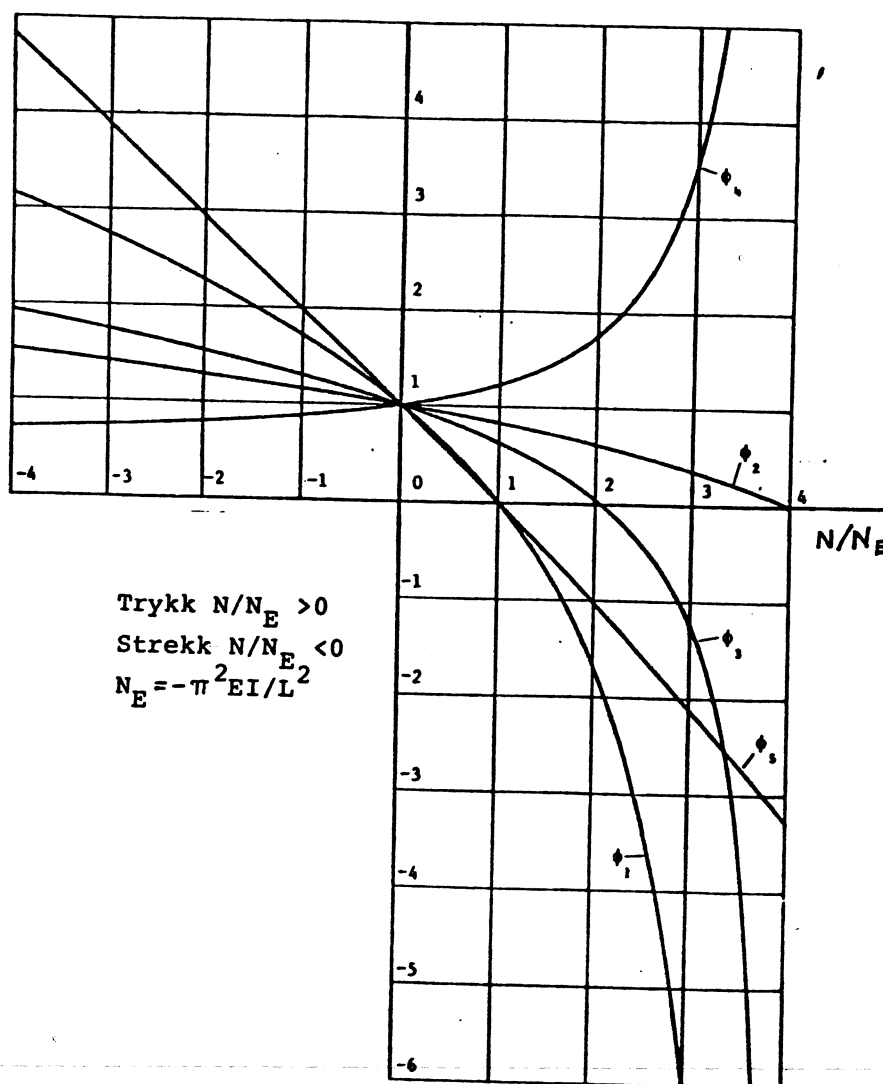


Fig. 4. Stabilitetsfunksjoner (fra ref. 4)

For  $N = 0$  blir alle  $\phi$ -verdier lik 1.0. Lign. 15 tar da formen som er velkjent for bjelker. Det er antatt foran at søylene ikke er utsatt for tverraster mellom knutepunktene. Dersom tverraster er tilstede, som normalt er tilfelle for bjelker, må også fastinnspegningsmomentene  $FIM_A$  og  $FIM_B$  inkluderes i hhv. Lign. 15a og 15b.



Lign. 15 kan benyttes direkte til å beregne stavendemomenter ved å sette opp ligningene for hver stav i rammen. En får da like mange uavhengige ligninger som det er ukjente knutepunktsrotasjoner og forskyvninger i rammen. For annet enn helt enkle rammer kan dette gi et ligningssystem som er uhåndterlig for håndregning. En bør da istedet benytte Lign. 15 til å sette opp stavenes stivhetsmatriser og løse ved hjelp av matrisestatikk.

For håndregning egner imidlertid den iterative *momentfordelingsmetoden*, kanskje bedre kjent som Cross-metoden, seg ypperlig. Denne antas kjent i sin konvensjonelle (1. ordens) form. Det eneste en må ta hensyn til i tillegg ved beregning etter 2. ordens teori er virkningene av stabilitetsfunksjonene på *stivhetstall* ( $K$ ) og *momentoverføringstall* ( $MO$ ) for staver med vesentlige aksialkrefter.

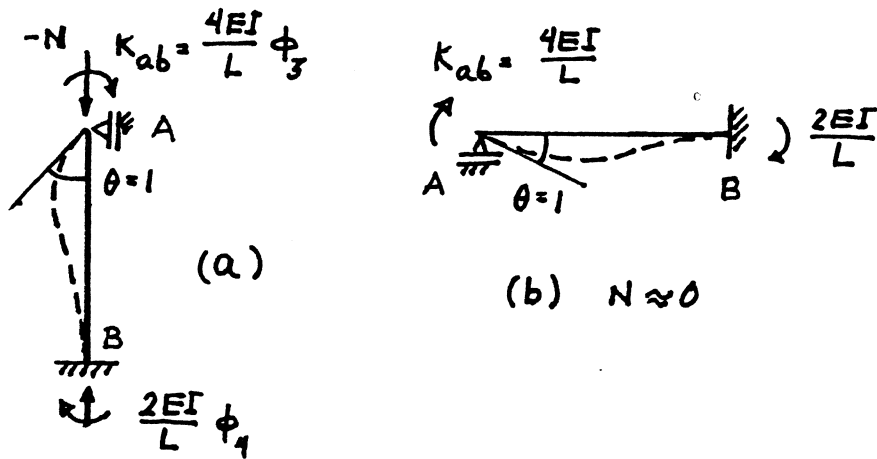


Fig. 5. Rotasjonsstivhetstall  $K$  for (a) Søyler og (b) Bjelker

For det vanligste tilfellet med borte stavende ('B') fast innspent, Fig. 5a, blir

$$K_{ab} = \frac{4EI}{L} \phi_3 \quad (17)$$

og

$$MO_{ab} = M_B/M_A = 0.5\phi_4/\phi_3 \quad (18)$$

For bjelker med aksialkrefter som utelukkende skyldes skjærkrefter fra søylene, kan en uten videre sette stabilitetsfunksjonene lik 1.0.

Det ubalanserte momentet i et knutepunkt (dvs. den negative sum av FIM i knutepunktet pluss evt. ytre momenter som virker direkte på knutepunktet) fordeles på vanlig måte til de forskjellige stavender som møtes i knutepunktet i forhold til deres stivhetstall.

Dersom borte ende (b) er leddet istedenfor fast innspent, kan stivhetstallet finnes fra Lign. 1 som

$$K_{ab} = \frac{4EI}{L} \phi_3 \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\phi_4}{\phi_3} \right)^2 \right] \quad (19)$$

For  $N = 0$  blir som kjent fra før  $K_{ab} = 3EI/L$ .

Som en ser er stivhets- og overføringstall avhengig av stabilitetsfunksjonene, dvs. av aksialkreftene. Disse er normalt ikke kjent ved begynnelsen av beregningene. Det er derfor nødvendig i utgangspunktet å beregne aksialkreftene i søylene overslagsmessig. Med disse overslagene kan tilnærmede stabilitetsfunksjoner beregnes og rammeanalysen gjennomføres. Dersom resulterende aksialkrefter avviker nevneverdig fra de opprinnelige overslagene bør analysen gjentas med forbedrede verdier for aksialkrefter og stabilitetsfunksjoner. Ofte vil de opprinnelige overslagene være tilstrekkelig nøyaktige.

## 2.5 Momentberegning av rammehjørne – Eksempel

Stavendemomenter samt maksimalmomenter skal beregnes for rammehjørnet i Fig. 6a. Aksialkrefter i bjelken neglisjeres. For søylen antas aksialkraftnivået gitt ved  $N/N_E = 0, 1.1, 2.0$  eller  $2.5$ .

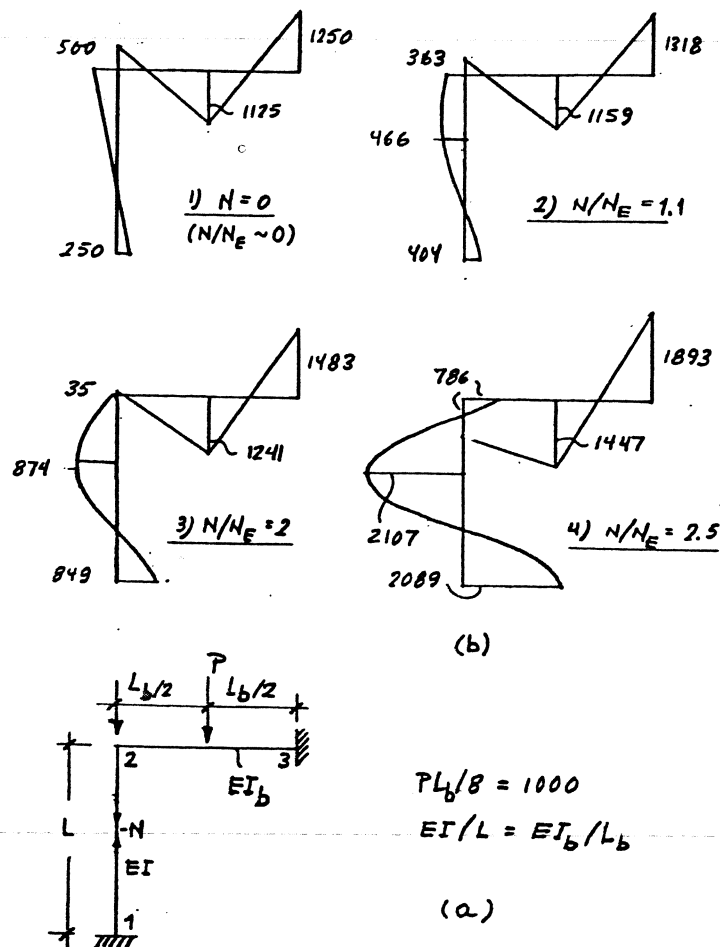


Fig. 6. Beregningseksempel – rammehjørne. (a) System, (b) Momentdiagrammer.

Selv om systemet er meget enkelt utføres beregningene ved hjelp av Cross-metoden for å demonstrere denne.

### Stivhetstall

$$K_{21} = 4EI\phi_3/L, \quad K_{23} = 4EI_b/L_b$$

### Fordelingstall

$$R_{21} = \frac{K_{21}}{K_{21} + K_{22}} = \frac{\phi_3}{\phi_3 + \frac{EI_b/L_b}{EI/L}} = \frac{\phi_3}{\phi_3 + 1} \quad (20)$$

$$R_{23} = 1 - R_{21}$$

### Fastinnspenningsmomenter

$$FIM_{12} = -FIM_{21} = 0, \quad FIM_{23} = -FIM_{32} = -PB/8 = -1000$$

### Stavendemomenter (Cross-metoden)

Generelt	①	②	③
	$0.5 \phi_4/\phi_3$ $\leftarrow$	$R_{21}$	$R_{23}$ $\rightarrow$
	$500R_{21} \frac{\phi_4}{\phi_3}$	$1000R_{21}$	$1000R_{23}$ $500R_{23}$
		$1000(R_{23}-1)$	$500(R_{23}+2)$
1)	$N=0; \phi_3=\phi_4=1.0$ (1. ORDENS)		
	250	500	-500
2)	$N/N_E=1.1; \phi_3=0.57, \phi_4=1.27$ ( $kL=1.05\pi$ )		
	404	363	-363
3)	$N/N_E=2; \phi_3=0.036, \phi_4=1.76$ ( $kL=1.41\pi=4.43$ )		
	849	35	-35
4)	$N/N_E=2.5; \phi_3=-0.44, \phi_4=2.34$ ( $kL=1.58\pi$ )		
	2089	-786	786

Fig. 7. Beregning av stavendemomenter (Cross-metoden)

### Maksimalt moment, tilfelle 3

Beregningen gjennomføres etter Avsn. 2.3. Velger det største momentet (ved knutepunkt 1) som  $M_B = 849$  og det minste (ved knutepunkt 2) som  $M_A = 35$ .

$$\text{Lign. 10: } \bar{r} = -M_A/M_B = -35/849 = -0.041$$

$$\text{Lign. 12: } \tan kx_m = (-0.041 - \cos 4.43)/\sin 4.43 = -0.247$$
$$kx_m = -0.242, kx_m + \pi = 2.90 = 0.66kL$$

$$\text{Lign. 13: } M_{\text{maks}} = 849/\cos 2.90 = -874$$

Tilsvarende kan maksimalmomentet beregnes for de andre tilfellene. Endelige momentdiagrammer for rammehjørnet er vist i Fig. 6.

### Diskusjon

2. ordens momenter kan betraktes som forskjellen mellom momentene for  $-N > 0$  (tilf. 2, 3, 4) og 1. ordens momentene (tilf. 1,  $N = 0$ ).

Sløylens toppmoment avtar med økende aksialkraft, og skifter endog retning når denne blir stor nok (tilf. 4). Dette innebærer at søylen "pålastes" bjelken som i dette tilfellet har fått en vesentlig økning i momenter. Likeledes øker fotmomentet med økende aksialkraft.

Eksemplene viser at det ikke er tilstrekkelig å bare beregne maksimalt søylemoment. Riktig beregning av momenter i tilknyttede staver og fundamenter er også viktig i mange tilfeller.

## 2.6 Stivhetsavhengighet

### 1. ordens analyse ( $N/N_E \approx 0$ )

Når en neglisjerer 2. ordens effekter (og setter stabilitetsfunksjonene lik 1.0), som i 1. ordens teori, vil momentfordelingen mellom søyler og bjelker kun avhenge av det relative stivhetsforholdet  $EI/EI_b$  mellom søyler og bjelker. Dette kan sees fra Lign. 20 ( $\phi_3 = 1$ ). Om stivhetene individuelt økes til det dobbelte vil altså ikke rammemomentene påvirkes så lenge stivhetsforholdene er de samme.

### 2. ordens analyse

I dette tilfellet er rammemomentene ikke lenger bare en funksjon av stivhetsforholdene søyler/bjelker, men også en funksjon av stabilitetsfunksjonene (Lign. 20) som igjen er en funksjon av forholdene  $N/EI$  for søylene. For gitte  $N$ -verdier, vil altså rammemomentene bli en funksjon av absolutte stivhetsverdier og ikke bare av stivhetsforhold som i 1. ordens teori.

## 2.7 Superposisjonsprinsippet

Momenter og skjærkrefter fra forskjellige lasttilfeller kan superponeres *kun* dersom aksialkreftene i rammens enkelte staver er de samme for alle lasttilfellene som en ønsker å superponere. Sagt med andre ord må stivhetstallene (Lign. 17) være de samme i alle lasttilfellene. Disse bør dermed være basert på endelige aksialkrefter tilsvarende den endelige lastkombinasjonen.

## 3 Kritisk last og knekk lengde

### 3.1 Kritisk last

Momenter og forskyvninger vokser og går mot uendelig (etter teorien foran) når lasten nærmer seg søylens eller rammens kritiske last ( $N_{kr}$ ). Den kritiske last er identisk med knekklasten (funnet fra egenverdi problemet) og representerer en øvre grensetilstand for systemet.

Den kritiske last for rammen i eksemplet i Avsn. 2.5 kan f.eks. beregnes tilnærmet ved gradvis å øke søylens aksialkraft inntil tilhørende momenter, beregnet som vist foran, blir meget store. Den tilhørende aksialkraften kan da tas som en tilnærmet kritisk last.

Når en benytter teorien foran er det sjelden eller aldri behov for å beregne den kritiske lasten. Det er hovedsaklig i forbindelse med tilnærmede metoder, hvor 1. og 2. ordens effekter beregnes separat, at den kritiske lasten ofte inngår som en viktig parameter.

En grunnverdi i den forbindelse er den kritiske last for en tosidig leddlagret søyle med lengde  $L$ .

$$N_{kr} = N_E = -\pi^2 EI/L^2 \quad (21)$$

Den kritiske lasten for den leddlagrede staven kalles som kjent gjerne for Eulerlasten ( $N_E$ ).

Fra Lign. 5 kan en finne kritiske laster for staver med vilkårlig innspenning. De kan uttrykkes på samme form som Lign. 21 dersom den virkelige stavlengden  $L$  erstattes av den såkalte *knekk lengden* (eller *effektive lengden*  $L_e$ , slik at

$$N_{kr} = -\pi^2 EI/L_e^2 \quad (22)$$

$L_e$  er altså å betrakte som lengden av en leddlagret stav med samme kritiske last (knekklast) som den virkelige staven.

Fysisk tilsvarer  $L_e$  avstanden mellom infleksjonspunktene til bøyelinjens knekkform.

### 3.2 Knekk lengde for søyle med vilkårlig innspenning

Knekk lengder, eller effektive lengder, kan utledes relativt enkelt for en del tilfeller, Fig. 8. I NS 3473, Tillegg A (8) er det gitt enkle uttrykk for å bestemme knekk lengder for staver med vilkårlig innspenning og med hhv. uforskyvelige (fastholdte) og fritt forskyvelige ender. Bakgrunn og anvendelse er diskutert i ref. 15.

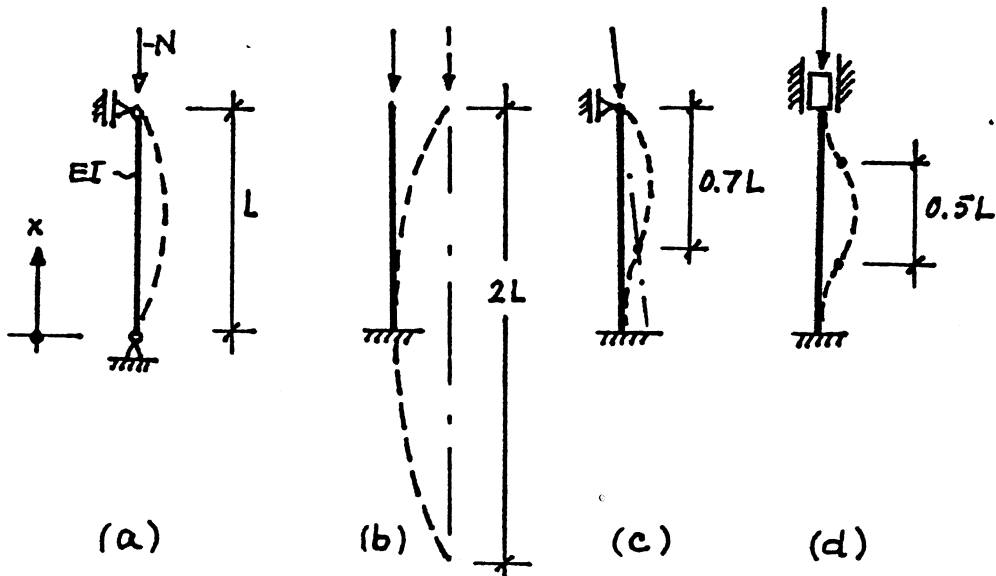


Fig. 8. Knekkformer - Elementært tilfeller

## 4 Tilnærmet elastisk beregning

### 4.1 Generelt

Tilnærmede analyser for beregning av søyle- og rammemomenter utføres normalt i to deler. Først beregnes 1. ordens momenter basert på søylenes og bjelkenes stivhetsforhold. Deretter korrigeres disse for 2. ordens effekter basert på "virkelige" stivhetsverdier.

Metoder av denne typen vil bli gjennomgått i det følgende.

## 4.2 Uforskyvelig søyle

### Grunnlag – Maksimalt moment

For en vilkårlig (uforskyvelig eller forskyvelig) søyle med kjente totale stavendemomenter (inkl. 2. ordens momenter), og uten tverrlast, kan maksimalt moment som vi har sett uttrykkes ved

$$M_{\text{maks}} = \bar{f}_m M_B \quad (23)$$

hvor momentforstørrelsesfaktoren  $\bar{f}_m$  er gitt ved Lign. 14 for en søyle med konstant stivhet  $EI$ , og  $M_B$  er totalt moment ved stavende  $B$ .

Denne faktoren kan omskrives og gis som et produkt av to ledd,

$$\bar{f}_m = \sqrt{\frac{1 + \bar{r}^2 - 2\bar{r} \cos kL}{2 - 2 \cos kL}} \cdot \sqrt{\frac{2 - 2 \cos kL}{\sin kL}} \quad (24)$$

Dersom stavendemomentene er like og motsatt rettede ( $\bar{r} = 1$ ) blir det første leddet lik 1. Det andre leddet er dermed momentforstørrelsesfaktoren for dette tilfellet.

En vanlig tilnærming for  $\bar{f}_m$  (se f.eks. ref. 2 og 3) er gitt ved

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_m &= C_m \frac{1 + 0.25\alpha_E}{1 - \alpha_E} \\ C_m &= 0.6 + 0.4\bar{r} \\ \bar{r} &= -M_A/M_B \\ \alpha_E &= N/(-\pi^2 EI/L^2) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Her er det igjen valgt å definere endemomentene som positive når de dreier i samme retning. Dette innebærer at  $\bar{r}$  (lik momentforholdet med motsatt fortegn) vil bli et positivt tall når momentene gir strekk på samme side (enkeltkrummet stav). I motsatt fall vil det bli negativt (dobbeltkrummet stav).

Videre er  $M_B$  det tallmessig største stavendemoment.

Det andre leddet i uttrykket for  $\bar{f}_m$  i Lign. 25 (brøken), som er momentforstørrelsesfaktoren for en søyle med konstant 1. ordens moment langs aksene ( $\bar{r} = 1$  gir  $C_m = 1$ ), er en meget god tilnærming til nøyaktig løsning, gitt ved det andre leddet i Lign. 24. Feilen er under 1% selv ved meget høye  $\alpha$ -nivåer.

Det første leddet ( $C_m$ ), som ivaretar virkningen av forskjell i stavendemomenter, er sammenlignet med nøyaktige verdier i Fig. 9.

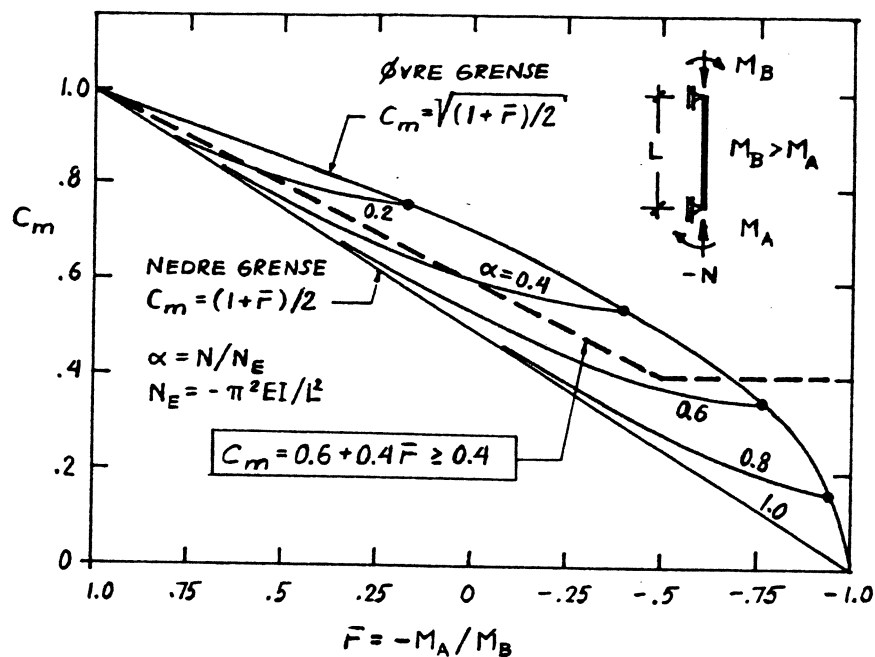


Fig. 9. Momentgradientfaktor  $C_m$

Den "øvre grense" i figuren svarer til at maksimalt moment er ved staven- den (B) og altså lik  $M_B$ . "Nedre grense" svarer til maksimalt moment ved feltmidte.

Det teoretiske grunnlaget utviklet foran er for en søyle som før pålastning er fullstendig rett.

I praksis vil det alltid være avvik fra tilsiktet geometri. Betegnelsen  $M_1$  vil generelt bli benyttet for 1. ordens momenter. Disse kan i prinsippet inkludere virkning av utilsiktede geometriavvik. Når det er behov for å indikere 1. ordens momenter basert på tilsiktet geometri, benyttes betegnelsen  $M_0$ .

### Leddlagret søyle

For en leddlagret søyle vil eventuelle stavendemomenter ikke påvirkes av 2. ordens effekter. Totale stavendemomenter er dermed lik 1. ordens stavendemomenter. Ligningene ovenfor kan derfor uten videre benyttes for å bestemme maksimalt moment, større eller lik det største stavendemoment, for den leddlagrede søylen.

### Vilkårlig innspent søyle

I motsetning til hva som er tilfelle for den leddlagrede søylen, påvirkes stavendemomentene for en vilkårlig innspent søyle av 2. ordens lastvirkninger. I tilnærmede analyser er normalt kun 1. ordens stavendemomenter ( $M_{1A}$ ,  $M_{1B}$ ) kjent.

Nå viser det seg at formelapparatet ovenfor også kan brukes som en rimelig



god tilnærming for vilkårlig innspente, uforskyvelige søyler som følger:

$$M_{\text{maks}} = f_m M_{1B} \quad (26)$$

$$f_m = C_m \frac{1 + 0.25N/N_{\text{kr}}}{1 - N/N_{\text{kr}}} \geq 1 \quad (27)$$

$$C_m = 0.6 + 0.4\bar{r} \geq 0.4 \quad (28)$$

$$\bar{r} = -M_{1A}/M_{1B} \quad (29)$$

I amerikansk-/engelskspråklig litteratur går metoden anvendt slik under navnet "the effective length factor approach". En detaljert gjennomgang og vurdering av metoden er gjort av Lai, MacGregor og Hellesland (2). Som beskrevet av Hellesland og MacGregor(1,7), kan formelverket ovenfor også benyttes til å beregne tilnærmet et eventuelt maksimalt moment mellom stavender for søyler i forskyvelige rammer. Dette kan være en aktuell situasjon for meget fleksible søyler, som i realiteten er fastholdt mot "ukontrollert" forskyvning av andre stivere søyler i den forskyvelige rammen.

Faktoren i telleren av brøken i Lign. 27 blir ofte satt lik 1.0. Lign. 27 kan da forenkles til

$$f_m = \frac{C_m}{1 - N/N_{\text{kr}}} \geq 1.0 \quad (30)$$

For betongsøyler med konstant armering, og dermed ikke konstant stivhet, vil denne forenklete formen ofte være vel så representativ (13).

Momentforstørrelsesfaktoren for en fastholdt søyle på den sistnevnte formen benyttes bl.a. i amerikanske (12) og en hel rekke andre lands regler. Virkningen av kryp pga. langtidslast ivaretas normalt ved at  $N_{\text{kr}}$  beregnes med en redusert  $EI$ -verdi.

Dersom 1. ordens momentfordeling er jevnt fordelt, blir  $C_m = 1$ . For dette tilfellet vil maksimalt 1. ordens og 2. ordens moment opptre i samme snitt. For en uforskyvelig søyle med vilkårlig innspenning, og dermed normalt en 1. ordens momentgradient over søylens lengde, trenger ikke dette være tilfelle. Dette er forsøkt illustrert i Fig. 10 og 11.

I figurene er 2. ordens momenter betegnet med  $M_2$ .

Faktoren  $C_m$  kan betraktes som en korreksjonsfaktor som tar hensyn til en momentgradient over lengden, og kan ansees som en korreksjon for at maksimalt 1. ordens og 2. ordens moment opptrer i forskjellige snitt.

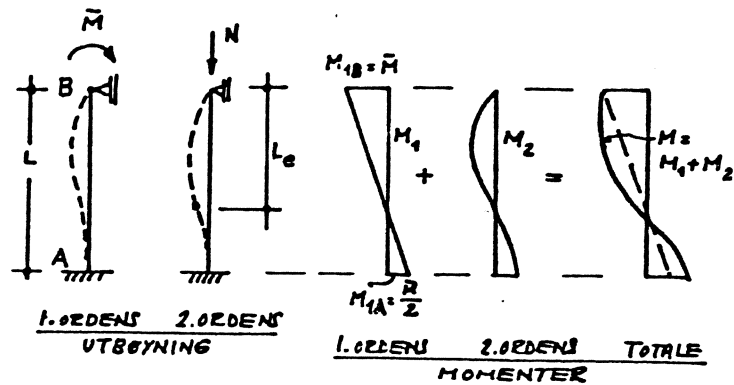


Fig. 10. Momenter i uforskyvelig søyle med ledd ved topp og full innspenning ved fot

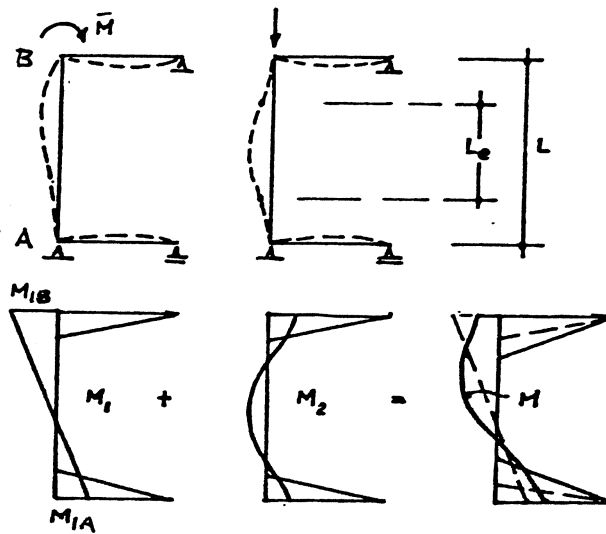


Fig. 11. Momenter i uforskyvelig ramme

### Tilleggsmomentformulering

Lign. 26, sammen med Lign. 30, kan omskrives til en sum av 1. og 2. ordens momenter. Multiplisering av begge sider av Lign. 31 med  $(1 - N/N_{kr})$ , innsetting av  $N_{kr}$  fra Lign. 22, erstatting av  $\pi^2$  med 10, samt innføring av

$$1/r = M_{maks}/EI \quad (31)$$

for krumningen i det mest påkjente snitt, finnes for  $M_{maks}$

$$M_{maks} = C_m M_{1B} + M_2 \geq M_{1B} \quad (32)$$

hvor 2. ordens momentet er gitt ved

$$M_2 = \left(\frac{-NL_e^2}{10}\right)\left(\frac{1}{r}\right) \quad (33)$$

Denne formen på 2. ordens momentet er den samme som gitt i NS 3473, Tillegg A.

### Forenklet metode etter NS 3473

I formuleringen ovenfor kan 1. ordens momentene ( $M_1$ ) i prinsippet inkludere virkningen av utilsiktede geometriavvik. Dette vil normalt komplisere beregningen.

I NS 3473, Tillegg A (8), er det gitt anledning til å regne  $\bar{r}$  med 1. ordens momenter basert på tilsiktet geometri,

$$\bar{r} = -M_{0A}/M_{0B} \quad (34)$$

og å ivareta avvik fra tilsiktet geometri gjennom en utilsiktet lasteksentrisitet  $e_a$ . Uttrykt med lasteksentrisiteter, er Lign. 32 erstattet med

$$M_{\text{maks}} = (-N)(C_m e_{0B} + e_a + a) \geq (-N)e_{0B} \quad (35)$$

hvor  $e_{0B} = M_{0B}/(-N)$  er 1. ordens eksentrisitet, og  $a = M_2/(-N)$  er 2. ordens eksentrisitet. Denne er igjen delt opp i en korttidsdel ( $a_e$ ) og en langtidtsdel ( $a_L$ ) pga. kryp. Med denne oppdelingen er det momentet som svarer til korttidsdelen som er gitt ved Lign. 33.

### Stavendemomenter

Ved bruk av forenklede metoder forutsettes normalt, mer eller mindre underforstått, at søylen armeres i hele sin lengde for maksimalt moment (se ref. 13). For søylen sitt vedkommende er det da ikke behov for å kjenne momentforløpet.

Derimot er stavendemomentene av interesse ved dimensjonering av tilknyttede bjelker. Tilsvarende enkle uttrykk som for maksimalt moment, er ikke utviklet for en uforskyvelig søyles endemomenter. Dersom ikke nøyaktigere beregninger utføres, vil en bjelkedimensjonering (kontroll) for maksimalt 1. ordens endemoment legges til grunn ved den enden hvor 2. ordens lastvirkning fører til en momentavlastning.

### Uforskyvelig søyle med tverrlast

For en uforskyvelig søyle med tverrlast langs aksene kan de tenkes at maksimalt 1. ordens moment fås mellom stavender og at maksimalt 2. ordens moment vil dannes nær dette. Dette tilfellet er ikke dekket i de generelle utledningene foran.

For på en forenklet måte å ivareta dette kan en sette  $C_m = 1$  og erstatte  $e_{0B}$  (eller  $M_{0B}$ ) med maksimal 1. ordens  $e_0$ -verdi langs aksene. Dette er i tråd med forenklet metode i NS 3473.

### 4.3 Uforskyvelig søyle – Sammenligning med nøyaktig teori

Momenter beregnet ved hjelp av den nøyaktige teorien beskrevet i Kap. 2 er vist for to søyler med forskjellig grad av innspenning i Fig. 12 og 13. Momentene er gitt som en funksjon av den dimensjonsløse lastparameteren  $N/N_E$ . Momentdiagrammer for typiske laststadier er videre vist. Maksimalmomentet er for enkelthets skyld gitt verdien 1 i disse.

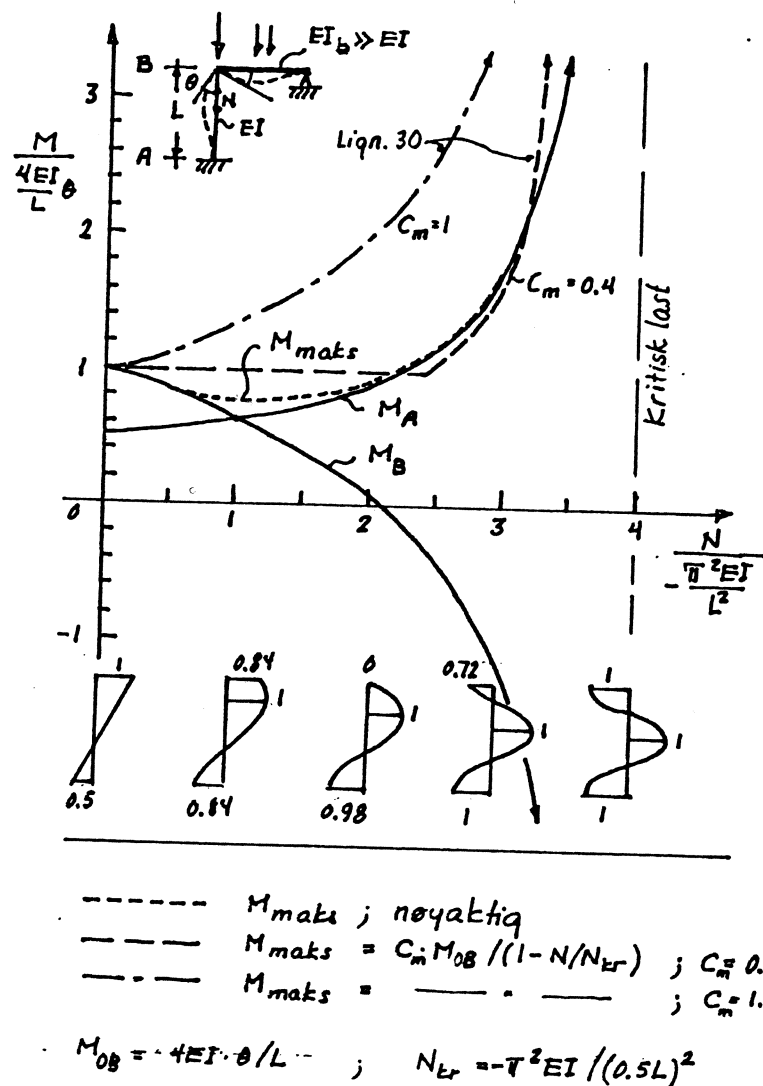


Fig. 12. Momenter i to-sidig innspent søyle med gitt topprotasjon

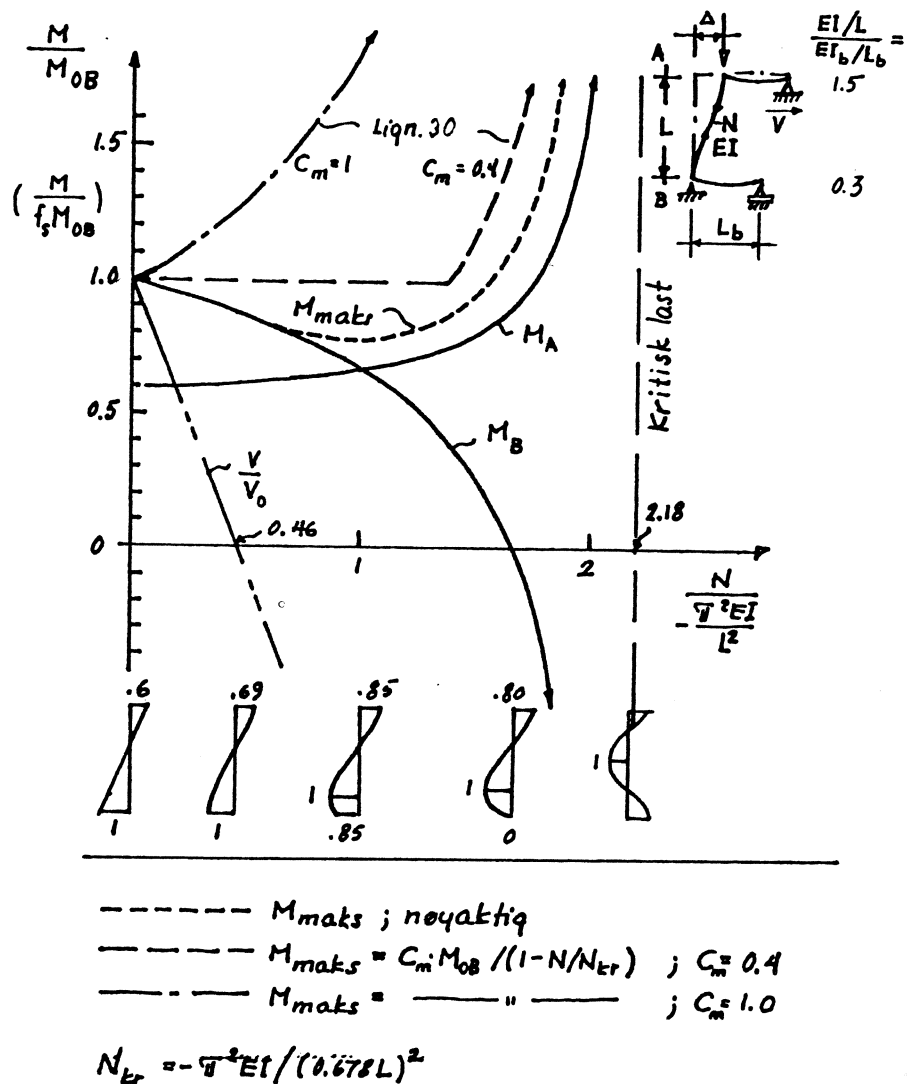


Fig. 13. Momenter og skjærkrefter i elastisk innspent søyle med gitt sideveifsfor skyvning

For å kunne vurdere nøyaktigheten av tilnærmelsen gitt ved Lign. 26 og 30 er også tilnærmede maksimalmomenter ( $M_{maks}/M_{0B} = f_m$ ) vist i de samme figurene.

Når momentkorreksjonsfaktoren  $C_m$  gitt ved Lign. 3 benyttes ( $C_m = 0.4$  for begge tilfeller), er overensstemmelsen med nøyaktig maksimalmoment rimelig god og stort sett til den sikre siden. Settes derimot  $C_m = 1.0$  blir tilnærmede maksimalmomenter altfor store.

## 4.4 Fritt forskyvelig søyle

### Momentforstørrelsesformulering

For en fritt forskyvelig søyle kan totale stavendemomenter fra laster som forårsaker sideveisforskyvningen som kjent (13) beregnes fra

$$\begin{aligned}M_A &= f_s M_{1A}, & M_B &= f_s M_{1b} \\ f_s &= 1 / (1 - \frac{N}{N_{kr}})\end{aligned}\quad (36)$$

for hhv. ende  $A$  og  $B$ . Dersom belastning mellom stavender skulle føre til at maksimalt 1. ordens moment opptrer mellom stavender, vil det være til den sikre siden å beregne maksimalt totalt moment som

$$M_{\text{maks}} = f_s M_{1,\text{maks}} \quad (37)$$

### Tilleggsmomentformulering

Etter den forenklete metoden i NS 3473, Tillegg A, kan maksimalt moment (i kritisk snitt) beregnes fra

$$M_{\text{maks}} = M_{1,\text{maks}} + M_2 \quad (38)$$

eller, uttrykt ved lasteksentrisiteter som

$$M_{\text{maks}} = (-N)(e_{0,\text{maks}} + e_a + a) \quad (39)$$

Her er  $M_2$ ,  $a$  og  $e_a$  so definert foran.

Iblant kan det være behov for å beregne 2. ordens lasteksentrisitet i andre snitt enn det kritiske. Etter NS 3473, Tillegg A, kan det da antas at 2. ordensfordelingen er sinusformet med halv bølgelengde lik  $L_e$ . Dersom f.eks. kritisk snitt er ved ende  $B$  ( $a_B = a$ ) kan  $a_A$ , ved ende  $A$ , beregnes fra

$$a_A = a(\sin \pi L_A / L_e) / (\sin \pi L_B / L_e) \quad (40)$$

hvor  $L_B$  og  $L_A (= L - L_B)$  er avstandene fra stavendene til nullpunktet.  $L_B$  kan beregnes fra  $L_B / L = R_B / (R_A + R_B)$ , hvor rotasjonsinnspenningsgradene er som definert i Tillegg A. *og i ref. 15*

## 5 Rammer

### 5.1 Generelt

I praksis er det sjelden en har med isolerte søyler å gjøre. Normalt vil søylene være del av et større rammeverk som enten kan være *fastholdt* mot sideveisforskyvning (ved skjærvegger eller andre avstivninger) eller fritt *forskyvelige*. I det siste tilfellet må rammens sideveisbelastninger opptas av søylene.

Andre ordens effekter for en søyle i rammer hvor sideveisstivheten er gitt ved skjærvegger og andre avstivninger kan normal regnes som for en isolert søyle fastholdt mot sideveisforskyvning i begge ender.

## 5.2 Uforskyvelig (fastholdt) ramme

Dette forutsetter at sideveisavstivningene dimensjoneres for all sideveis belastning, og at avstivningene gjøres tilstrekkelige stive slik at relativ toppforskyvning, dvs. av søyletopp i forhold til søylefot, blir små.

Normalt vil dette være tilfelle for søyler i etasjer hvor sideveis-avstivningene har en total stivhet mot sideveis forskyvning som er minst 6 ganger summen av søylenes stivhet mot sideveis forskyvning(12). I slike tilfeller kan en anta at bidraget til 2. ordens momenter fra sideveis forskyvning er neglisjerbart.

## 5.3 Forskyvelig ramme – Tilleggsmomentformulering

Rammer som ikke er fastholdt mot sideveisforskyvning må regnes som forskyvelige. Dette er typisk for rammer hvor sideveisstivheten utgjøres av søylenes sideveis stivhet.

Under sideveis forskyvning av en plan ramme vil samtlige søyler (i en etasje) få samme relative forskyvning av søyletopp, Fig. 14. Denne forskyvningen, og dermed 2. ordens momentene i de forskjellige akser, vil avhenge av aksiallasten i samtlige søyler, samt av samtlige søyle- og bjelkestivheter.

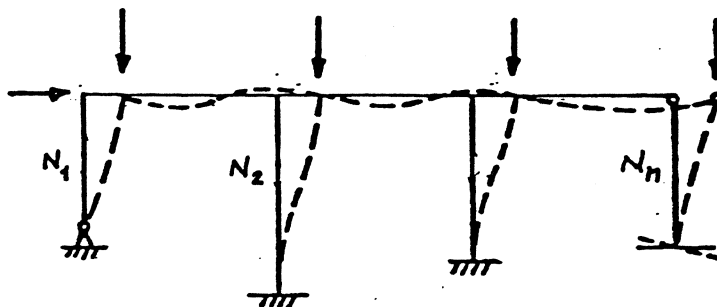


Fig. 14. Forskyvelig ramme med ulik slankhet i de forskjellige akser

Under forskyvningen vil de "sterkere" søylene støtte de "svakere". Tilleggsforskyvningen vil således bli liggende et sted mellom det en ville fått for de sterke og de svake søylene om disse hadde fått anledning til å forskyve seg fritt, dvs. uavhengig av hverandre.

NS 3473 verken omtaler eller gir retningslinjer for hvordan 2. ordens effekter i forskyvelige rammer med søyler av ulik sideveis stivhet skal behandles. Det antas at dagens praksis er å behandle hver søyle isolert. Dette vil gi gode resultater for søyler i rammer hvor forholdet

$$NL_e^2/EI$$

er tilnærmet konstant i alle søyleakser.

I tilfeller hvor dette forholdet varierer sterkt fra søyle til søyle, vil en isolert betraktning av hver søyle føre til en underdimensjonering av de "sterkere" søyler og tilsvarende til en overdimensjonering av de "svakere". Total sideveisstabilitet kan imidlertid fortsatt blir oppnådd, selv om dette ikke nødvendigvis er sikkert.

I CP 110 (12) anbefales det at 2. ordens momentet i en gitt retning ( $x$  eller  $y$ ) for søyler i forskyvelige rammer beregnes for en slankhet  $L_e/h$  som er lik gjennomsnittet for alle søylene i etasjen i den gitte retning. *Slankheten må imidlertid ikke settes lavere enn den som tilsvarer knekking av uforskyvelig søyle.* I revisjonen som førte til BS 8110 (12) ble dette kravet erstattet med et som gikk på innføring av en gjennomsnittlig 2.ordens forskyvning ved topp søyler. I begge versjoner gir dette gir en riktigere beregning av tilleggsmomenter i de forskjellige akser enn en isolert betraktning av hver søyle med sin slankhet ville gitt.

En enda bedre vurdering av samvirket mellom svake og sterke søyler oppnås sannsynligvis om systemknekkleddene for den forskyvelige rammen benyttes. Hellesland har i et annet kurskompendium(15) foreslått en enkel formel for tilnærmet beregning av systemknekkleddene ( $L_{e,s}$ ) for søylene. En indeks  $s$  er føyd til for å skille disse fra tilnærmede knekkledder som beregnes isolert for hver søyle. Disse knekkleddene, evt. tilvarende som reflekterer samvirke, bør benyttes i praktisk bergning og dimensjonering av forskyvelige rammer. Formelverket blir som vist foran.

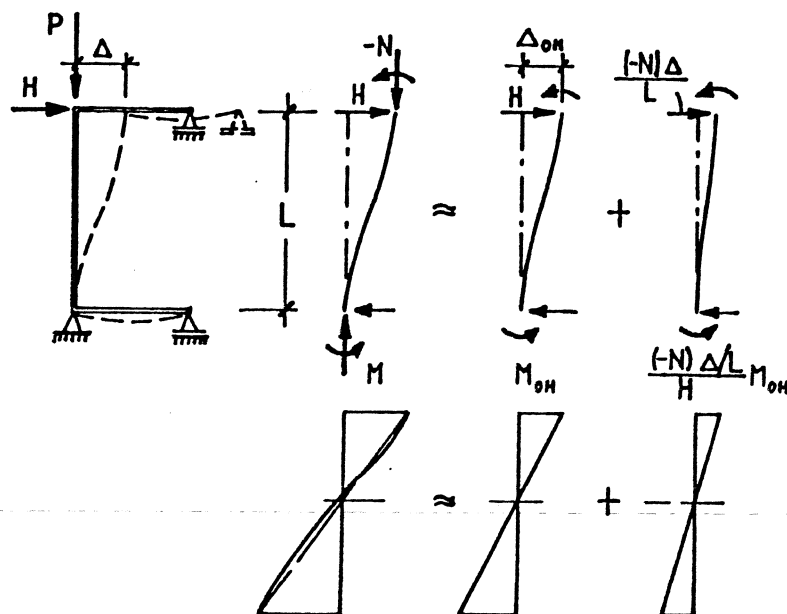


Fig. 15.  $N - \Delta$  metode



## 5.4 Forskyvelig ramme – Momentforstørrelsesmetode

Det finnes en rekke forskjellige tilnærmede metoder som i forskjellig grad tar vare på samspillet mellom svake og sterke søyler, og som gir et riktigere bilde av lastvirkningene enn en tilleggsmomentformulering uttrykt ved krumning i en enkelt søyle vil gi.

Slike metoder er godt beskrevet i litteraturen (1, 5, 6, 9, 12), og har sitt teoretiske grunnlag i såkalte  $N - \Delta$  (eller  $P - \Delta$ ) betraktninger.

### $N - \Delta$ metode for horisontalbelastet søyle

$N - \Delta$  metoden kan beskrives vha. den forskyvelige søylen i Fig. 15 belastet med en horisontallast  $H$  og en aksiallast  $N$ . Horisontallasten gir 1. ordens momenter  $M_{0H}$ , som varierer lineært langs aksene, og en sideveisforskyvning  $\Delta_{0H}$  ved søyletopp. Virkningen av  $N$  er å øke forskyvningen til  $\Delta$ . Denne virkningen kan beregnes tilnærmet ved å erstatte det dreierende moment  $(-N)\Delta$  med en fiktiv horisontallast  $(-N)\Delta/L$  og så skalere resultatene for  $H$ . Endelig forskyvning finnes som

$$\Delta = \Delta_{0H} + \Delta_{0H} \frac{(-N)\Delta/L}{H}$$

eller, ved å løse for  $\Delta$ , som

$$\begin{aligned} \Delta &= f_s \Delta_{0H} \\ f_s &= 1 / \left( 1 - \frac{(-N)\Delta_{0H}}{HL} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Tilsvarende blir totalt stavendemoment

$$M = f_s M_{0H} \quad (42)$$

### Horisontalbelastet ramme

For en ramme med flere søyler med samme lengde, kan forstørrelsesfaktoren  $f_s$  uttrykkes på samme form som ovenfor dersom  $N$  i uttrykket for  $f_s$  erstattes med summen av aksialkreftene i alle søylene,  $\sum N$ . Metoden forutsetter at 2. ordens momentvariasjon er lineær og proporsjonal med 1. ordens variasjon langs aksene. Dette er en tilnærming til den usikre siden.

Forskjellen mellom lineær og virkelig 2. ordens momentvariasjon kan ivaretas ved å innføre en fleksibilitetsfaktor  $\gamma$  som normalt varierer mellom 1.0 og 1.22 ( $= 12/\pi^2$ ). I tilnærmet formel for  $\gamma$  er gitt av Hellesland(15).

For en forskyvelig ramme med søyler med forskjellig lengde har Hellesland vist (1, 5, 6) at forstørrelsesfaktoren kan skrives som

$$f_s = 1 / \left( 1 - \frac{\Delta_{0H}}{H} \sum (-\gamma N/L) \right) \quad (43)$$

eller, uttrykt ved kritiske laster, som

$$f_s = 1 / \left( 1 - \frac{\sum \gamma N/L}{\sum \gamma N_{kr}/L} \right) \quad (44)$$

Fleksibilitetsfaktoren kan ugunstig antas som  $\gamma = 1.2$ , i samtlige akser, i det første uttrykket. I det andre uttrykket vil virkningen av  $\gamma$  bli liten siden den forekommer i både teller og nevner, og kan i praktiske beregninger derfor like godt fjernes. Den er medtatt ovenfor for fullstendighetens skyld.

Summetegnene gjelder samtlige søyleakser. De kritiske laster  $N_{kr}$  (Lign. 22) bestemmes for hver søyle, med sin innspenning, ved å betrakte dem som fritt forskyvelige ("løsrevet" fra de øvrige søylene). For rammen i Fig. 14 vil det eksempelvis være naturlig å regne rotasjonsstivheten av bjelkene som  $6(EI/L)_b$  i de to første feltene, og, ved den tredje søylen, som  $3(EI/L)_b$  for det siste feltet pga. leddlagring ved høyre opplegg.

I vanlige bygg er søylelengden konstant og kanselleres dermed ut i det siste uttrykket. I denne forenklete formen benyttes uttrykket i de amerikanske regler (12).

Total sideveisforskyvning av rammen og totale stavendemomenter i hver akse, kan beregnes som før fra Lign. 41 og 42.

#### Avvik fra tilsiktet geometri

For forskyvelig rammer kan virkningen av en utilsiktet skjevstilling av søylene beregnes enkelt ved slike metoder (5, 6). Dersom det antas at samtlige søyler i rammen har en skjevstilling gitt ved  $\Delta_a/L$ , hvor  $\Delta_a$  er loddavviket mellom søyletopp og -fot, kan tilhørende 1. ordens momenter ved stavendene,  $M_{0a}$ , beregnes (ved skalering) som

$$M_{0a} = M_{0H} \frac{\Delta_a \sum(-\gamma N/L)}{H} \quad \gamma = 1 \quad (45)$$

hvor  $M_{0H}$  er momentet ved en gitt stavende pga. en horisontallast  $H$  ved rammetopp. Den tilsvarende utilsiktede eksentrisitet ved den aktuelle stavende er da

$$e_a = M_{0a}/(-N)$$

I momentforstørrelsesfaktor-formuleringen kan totalt moment igjen gis ved

$$M_A = f_s M_{0a} \quad (46)$$

Videre kan totale stavendemomenter fra virkning av  $H$  og  $\Delta_a$  skrives på formen

$$M = f_s(M_{0H} + M_{0a}) = f_s M_1 = f'_s M_{0H} \quad (47)$$

hvor

$$f'_s = f_s + (f_s - 1) \frac{\Delta_a}{\Delta_{0H}} \quad (48)$$

er en ekvivalent forstørrelsesfaktor. Ved bruk av denne er det unødvendig å utføre en egen beregning av 1. ordens momenter pga. utilsiktet geometriavvik.

#### Etasjesrammer

Framstillingen foran kan også anvendes på rammer med flere etasjer. Forskyvning  $\Delta_{0H}$  er da relativ forskyvning mellom gulv og tak i den betraktede

etasjen, og  $H$  er total horisontallast som overføres gjennom etasjen, dvs. inkludert horisontallast fra overliggende etasjer.

Flere alternative beregningsmetoder for etasjerammer er diskutert i ref. 6.

### Avstivende og avstivede søyler

Søylene i en forskyvelig ramme, Fig. 14, vil bidra i forskjellig grad til å ta opp horisontalbelastningen. Med økende aksialkraft og lengde, og avtagende tverrsnittsstivhet  $EI$ , vil stivheten mot sideveisforskyvning avta. Dette framgår av Fig. 13 hvor en søyle med forskjellig aksialkraftnivå ( $N/N_E$ ) blir påtvunget en gitt sideveisforskyvning.

Momenter, og også skjærkrefter ( $V$ ) er sterkt avhengig av  $N/N_E$ -nivået. Søyler med aksialkraftnivå under en viss størrelse (0.46 i figuren) yter motstand mot sideveisforskyvningen, indikert ved en positiv skjærkraft. Slike søyler vil bidra med å *avstive* en ramme. Er aksialkraftnivået større blir skjærkraften negativ. Slike søyler yter altså ingen motstand mot sideveislaster. Tvertimot, de har behov for selv å bli *avstivet* for ikke å bryte sammen (bli ustabil).

Vi kan derfor snakke om *avstivende* og *avstivede* søyler i en forskyvelig ramme. Skillet går ved  $V = 0$ . Dette svarer igjen til en aksialkraft lik kritisk last for fritt forskyvelige søyler. Hadde søylen i Fig. 14 være fri til å forskyve seg sideveis ville altså den kritiske last vært  $N_{kr} = 0.46 (\pi^2 EI/L^2)$ , og tilhørende knekk lengde  $L_e = 1.47L$ .

For å sikre at søyler i forskyvelige rammer ikke skal få sammenbrudd ved utknekkning mellom stavender foreslo Hellesland og MacGregor (7, 1, 6) at maksimalt moment beregnes som

$$M_{maks} = f_m f_s M_{1B} \quad (49)$$

hvor  $M_{1B}$  er det tallmessig største stavendemoment. Forstørrelsesfaktorene er som definert tidligere. Mens  $f_m$  beregnes med kritisk last for søylen betraktet som uforskyvelig (Lign. 30), beregnes  $f_s$  for hele rammen betraktet som forskyvelig (Lign. 43 eller 44).

For en avstivende søyle ( $V > 0$ ) i en horisontalbelastet ramme vil maksimalt moment alltid være ved en av stavendene, som det også framgår av Fig. 13. For slike søyler blir alltid  $f_m = 1$  (Lign. 30) og dette er som vi ser av figuren en forenkling til den sikre siden.

Videre antas det at det vil være ytterst sjelden i praksis at en vil ha avstivede søyler i den horisontalbelastet ramme som har så høyt lastnivå ( $N/N_{kr}$ ) at  $f_m$  blir større enn 1. Dersom betydelige 1. ordens momenter også innføres fra vertikal laster kan dette forholdet endres.

En avstivet søyle kan betraktes som en fastholdt søyle med en påtvunget (kontrollert) sideveisforskyvning som er avhengig av samtlige søylers sideveisstivhet.

## 5.5 Horisontal- og vertikalbelastet forskyvelig ramme

En forskyvelig ramme vil normalt samtidig være belastet med både horisontallaster (fra vind, bremsekrefter i bruer o.l.) såvel som egen- og nyttelaster. Problematikken knyttet til hvordan momenter fra horisontallaster og vertikallaster kan kombineres blir belyst nedenfor.

Dersom totale momenter regnes for hånd, f.eks. ved momentfordelingsmetoden (Cross-metoden), vil beregningen utføres i to trinn som gir:

1.  $M_{ns}$  – stavendemomenter for fastholdt ramme (“ $ns$ ” = null sideveisforskyvning)
2.  $M_s$  – stavendemomenter fra sideveisforskyvning pga. horisontallaster, inkl. fastholdningskrefter fra pkt. 1.

Forutsatt samme aksialkrefter ( $\phi$ -funksjoner) kan momenter i samme snitt adderes, og maksimalt moment i en søyle kan beregnes fra Lign. 13 (23),

$$M_{\text{maks}} = \bar{f}_m(M_{ns} + M_s)_B = \bar{f}_m M_B \quad (50)$$

Dersom rammeberegningen kun gir 1. ordens momenter, som er det normale og som vi er opptatt av her, følger det fra tilnærmede formuleringer presentert foran, at Lign. 50 kan tilnærmet skrives som

$$M_{\text{maks}} = f_m(M_{1,ns} + f_s M_{1,s})_B \quad (51)$$

Her er momentsummer (parantesen) regnet ved ende  $B$ , som velges som enden med størst tallmessig momentsum. For beregning av  $f_m$  (Lign. 30), legges likeledes forholdet mellom minste og tallmessig største momentsum ved stavender til grunn (Lign. 29, evt. 34).

Lign. 51 er en naturlig utvidelse av Lign. 50 når en i tillegg til horisontallast tar med egenvekt og nyttelast på bjelker, og er diskutert nærmere i ref. 6 med en litt annen vinkling enn ovenfor.

Idag utføres rammeberegninger normalt på datamaskin, og resultater gis for endelig statisk system, og ikke for fastholdt og forskyvelig ramme hver for seg. Sannsynligvis for å tilpasse seg denne situasjonen, har f.eks. de amerikanske regler ACI 318 (12) valgt å ikke skille mellom momenter i fastholdt og forskyvelig system, men mellom momenter i endelig system fra 1) last er som gir utebydelig sideveisforskyvning ( $M_{1,ns}$ ), og 2) fra laster som gir betydelig sideveisforskyvning ( $M_{1,s}$ ). Vanligvis vil vertikallaster (egenvekt og nyttelaster) gi små sideveisforskyvninger. Feilen ved å neglisjere fastholdningskreftene vil derfor ofte være små.

De kanadiske regler (10), som også skiller mellom momentene på en tilsvarende måte, har forøvrig innarbeidet Lign. 51 i regelverket. I ACI (12) benyttes en tilsvarende “koblingsligning”, dog med noen forskjeller.

Det ligger ikke noen stor forenkling i å neglisjere 2. ordens virkningen av sideveisforskyvningene fra vertikallast på bjelker o.l., ettersom de gjerne beregnes uansett i en rammeanalyse. Virkningen kan f.eks. ivaretas på samme måte som beskrevet for en skjevstilling  $\Delta_a$  ovenfor. Dersom vi har sjevstilling  $\Delta_a$  og sideveisforskyvning  $\Delta_{0q}$  pga. egenvekt og nyttelast, innføres

$$f_s M_{1,s} = f'_s M_{0H} = \left[ f_s + (f_s - 1) \frac{\Delta_a + \Delta_{0q}}{\Delta_{0H}} \right] M_{0H} \quad (52)$$

i Lign. 51.

## 6 Stivheter

Ifølge NS 3473 kan krefter og momenter "bestemmes etter anerkjente metoder basert på elastisitetsteorien. Det skal tas hensyn til riss i betongen der dette påvirker lastvirkningene vesentlig".

Det må også antas at det skal tas hensyn til lastnivået når dette påvirker lastvirkningene vesentlig. Som illustrert i Fig. 1c avtar sekantstivheten med økende lastnivå.

Ved beregning av rammemomenter (snittkrefter) etter 1. ordens teori, er momenter som skyldes ytre laster kun avhengig av det relative stivhetsforhold mellom de enkelte søyler og bjelker, og ikke av de absolutte stivhetsverdier (Avsn. 2.6). Dvs. om en antar alle stivheter dobbelt så store som de virkelig er, vil snittkreftene likevel bli riktige så lenge stivhetsforholdet er riktig.

Momenter fra 2. ordens lastvirkninger er derimot avhengig av virkelige stivheter. Antas søylestivhetene større enn det de virkelig er, vil utbøyningen og dermed 2. ordens momentene bli for små og dimensjoneringen vil være til den usikre siden. Dette forutsatt at 1. ordens momenter fra ytre laster er regnet for riktig stivhetsforhold og likeså at effektive lengder blir regnet for innspenningsgrad basert på riktig stivhetsforhold.

Første ordens momenter som skyldes tvangskrefter (temperatur, svinn, kryp, setninger osv.) er likeså avhengig av virkelige stivheter. Tvangskrefter øker med økende stivheter.

Her skal det også bemerkes at selv det å komme fram til riktig forhold mellom sekantstivheter ikke alltid er så enkelt, ikke minst pga. at bjelker og søyler normalt ikke når sine dimensjonerende lastvirkninger for en og samme lastplassering. Forholdet mellom sekantstivhetene er derfor ikke konstant men varierer avhengig av lastenes plassering. Dette gjør at en nøyaktig bestemmelse av sammenhørende sekantstivheter for de forskjellige søyler og bjelker er en omstendelig prosess.

For 1. ordens lastvirkninger fra ytre laster, som kun er avhengig av stivhetsforholdene, vil det normalt være akseptabelt å legge uopprikkede stivheter for de rene betongtverrsnitt til grunn i rammeanalysen.

For tilnærmet beregning av 2. ordens lastvirkninger etter momentforstørrelsesmetoden (moment-multiplikatormetoden), Lign. 51, kan kritisk last  $N_{kr}$  (uten krypeffekter) iflg. ACI (12) beregnes med flg. stivhetsantagelse

$$EI = 0.2E_cI_c + E_sI_s \quad (53)$$

hvor  $E_c$ ,  $E_s$ ,  $I_c$  og  $I_s$  er elastisitetsmoduler og treghetsmomenter for hhv. betongtverrsnittet og armeringen (som da i utgangspunktet må antas). ACI tar videre hensyn til materialusikkerheter ved å erstatte  $N_{kr}$  i Lign. 22 med  $N_{kr}$  multiplisert med en "motstandsreduksjonsfaktor". I norsk praksis kan en oppnå det samme ved å dividere med våre materialfaktorer (13).

I tilleggsmomentmetoden (Lign. 35 og 39) er 2. ordens momentet gitt som en funksjon av krummingen. Denne må bestemmes på samme premisser som  $EI$  ovenfor for å gi samme resultater.

Innspenningsparametrene(15) er avhengig av stivhetsforholdet. Som utgangsantagelser ved beregning av  $R$ - eller  $G$ -verdier i forbindelse med knekklemberegningen, kan bjelkestivheten baseres på opprisset tverrsnitt og søylestivheter på Lign. 53.

ACI (12), f.eks., anbefaler verdiene ovenfor, og alternativt

$$\begin{aligned} EI_b &= 0.5E_cI_c \\ EI &= E_cI_c \end{aligned} \quad (54)$$

for hhv. bjelke og søyletverrsnitt. ACI(12) stiller ikke noe krav til etterkontroll av disse stivhetene. Stivhetene gitt ved Lign. 54 er også tatt inn i NS 3473, Tillegg A, i forbindelse med knekklemberegning. Heller ikke i NS 3473 stilles det krav om etterkontroll av disse stivhetene i den forbindelsen.

## Litteratur

1. Hellesland, J. and MacGregor, J.M. "Mechanics and Design of Columns in Sway Frames", Univ. of Alberta, Edmonton, 1981. Upublisert rapport.
2. Lai, S.-M.A., MacGregor, J.G. and Hellesland, J., "Geometric Non-linearities in Non -sway Frames", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 12, No ST12, Dec. 1983.
3. Galambos, T.V., "Structural Members and Frames", Prentice Hall, New York 1968.
4. Bergan, P., Syvertsen, T.G., "Knekning av søyler og rammer", Tapir 1978, Trondheim.
5. Hellesland, J., "Approximate Second Order Analysis of Unbraced Frames", Internal Report, Dr.Ing. A. Aas-Jakobsen A/S, Oslo 1976.

6. Lai, S.-M.A., and MacGregor, J.G., "Geometric Non-linearities in Unbraced Multistory Frames", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 109, No 11, Nov. 1983.
7. Hellesland, J., and MacGregor, J.G., "Design Indications from Tests of Unbraced Multipanel Concrete Frames", *Discussion*, *ACI Journal*, Vol. 4, No 2, Feb. 1982.
8. NS 3473, "Prosjektering av betongkonstruksjoner – Beregning og dimensjonering", Norges Standardiseringsforbund, 3. utg., okt. 1989/ 4. utg. nov. 1992.
9. "CEB/FIP Manual of Buckling and Instability", *CEB Bulletin d'information* No 123, Dec. 1977.
10. CAN3-A23.3-M84, "Design of concrete structures for buildings", Canadian Standards Association, Toronto, Canada, 1984.  
Collins, M.P., Mitchell, D. and MacGregor, J.G., "Explanatory notes on CSA Standard A23.3-M84", Canadian Portland Cement Association, 1985.
11. "CP 110: Code of Practice for the structural use of concrete. Part 1 -- Design, materials and workmanship", British Standards Institution, London, Nov. 1972.  
  
"BS 8110: Structural use of concrete", Part 1, British Standards Institution, London, 1985.
12. "ACI 318-8: Building Code Requirements for Reinforced Concrete", American Concrete Institute, Detroit, 1989.  
  
"ACI 318R-89: Commentary on Building Code Requirements for Reinforced Concrete", American Concrete Institute, Detroit, 1989.
13. Hellesland, J., "2. ordens teori for armert betongstav – Prinsipper og forenklinger", NIF kurs: "Slanke betongkonstruksjoner – Forenklet og optimal dimensjonering mht. sikkerhet og økonomi" (Storefjell), NIF, nov. 1998.
14. Hellesland, J., "Slanke trykkstaver etter NS 3473", NIF kurs: "Slanke betongkonstruksjoner – Forenklet og optimal dimensjonering mht. sikkerhet og økonomi" (Storefjell), NIF, nov. 1998.
15. Hellesland, J., "Trykkstaver i rammer – Kneklengder", NIF kurs: "Slanke betongkonstruksjoner – Forenklet og optimal dimensjonering mht. sikkerhet og økonomi" (Storefjell), NIF, nov. 1998.

