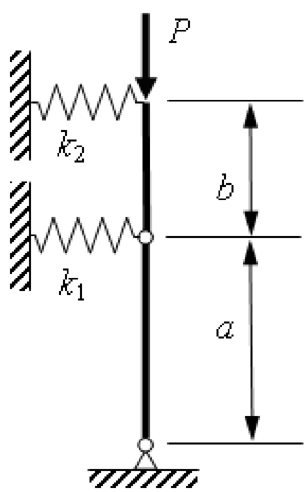
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 4530 — Stabilitet og knekning av konstruksjoner.
Eksamensdag:	Fredag 9. desember 2005.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (30%)



Figur 1.

Figur 1 viser et system som består av to uendelig stive staver som er belastet med en vertikalkraft P og som er sideveis støttet av to lineære, elastiske fjærer. I ubelastet tilstand er begge staver i vertikal stilling.

(Fortsettes side 2.)

a) Skriv ned et nøyaktig uttrykk for den totale potensielle energien for dette systemet i deformert tilstand som funksjon av dimensjonene a og b, stivhetene k_1 og k_2, kraften P og rotasjonene θ_1 og θ_2 av nedre og øvre stav.

b) Anta at deformasjonene er små og beregn de kritiske lastene og tilsvarende knekningsformer for dette systemet gitt at $a = 2b$ og $k_1 = k_2 = k$.

c) Undersøk stabilitet for den udeformerte tilstanden som P økes fra null til en verdi $6kb$.

Oppgave 2 (40%)

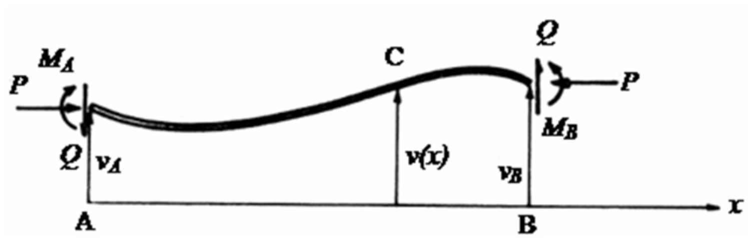
Del A

a) Definer uttrykkene *knekklengde* og *slankhet* i forhold til elastisk knekning av en rett søyle med aksiallast.

b) Vis ved hjelp av en skisse hvordan bruddlasten for en søyle varierer med slankhet under forutsetning at materialet er lineær-elastisk med uniform bøyestivhet EI.

c) Beskriv kort hvordan dette forholdet mellom bruddlast og slankhet kan påvirkes av plastisk deformasjon og geometrifeil.

Del B



Figur 2a

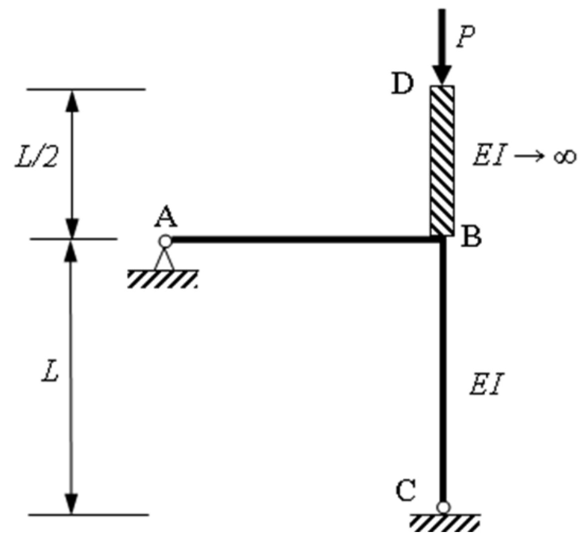
Figur 2a viser en bjelke AB med uniform bøyestivhet EI og aksiallast P. Momentene og skjærkreftene ved endene er som vist i figuren.

Vis at tverrforskyvningen $v(x)$ ved avstand x langs bjelken fra ende A er gitt ved differensialligningen

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = \frac{1}{EI}(Pv_A + M_A - Qx)$$

(Fortsettes side 3.)

Del C



Figur 2b.

Figur 2b viser en søyle BC med uniform bøyestivhet EI som er stivt forbundet i punkt B med en bjelke AB og med en utkragersøyle BD. Bjelken ABs bøyestivhet gir en rotasjonsstivhet $k_b = 3EI/L$ ved punkt B. Utkragersøylen BD har uendelig stor bøyestivhet. Skjær- og aksialdeformasjoner kan neglisjeres og det kan regnes med 1. ordens aksialkrefter.

a) Vis at den kritiske lasten er gitt ved

$$\tan\beta = \frac{\beta(6-\beta^2)}{6+\beta^2}$$

hvor $\beta = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}}$.

b) Beregn β og deretter søyle BCs knekklengde.

Oppgave 3 (30%)

Del A

En lineær-elastisk bjelke har lengde ℓ og bøyestivhet EI. Aksialdeformasjonene neglisjeres og tverrforskyvningene antas å være små. Tverrforskyvningen ved avstand x langs bjelken uttrykkes tilnærmet ved n formfunksjoner:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x) = \boldsymbol{\phi c}$$

der formfunksjonene

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \dots \ \phi_n]$$

(Fortsettes side 4.)

og koeffisientene

$$\boldsymbol{c} = [c_1\ c_2\ c_3\ \ldots\ c_n]^T$$

Det kan vises at likevekt er tilnærmet gitt ved

$$(\boldsymbol{K} - P\boldsymbol{K}_G)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

hvor

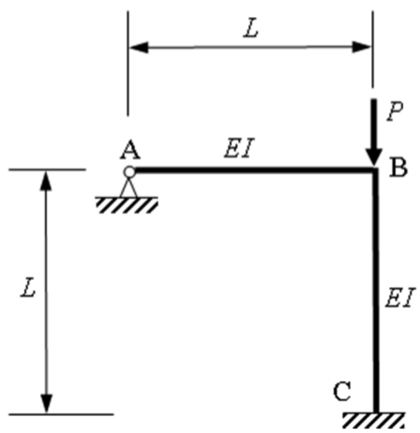
$$\boldsymbol{K} = \int_\ell EI(\boldsymbol{\phi}'')^T\boldsymbol{\phi}''dx, \qquad \boldsymbol{K}_G = \int_\ell (\boldsymbol{\phi}')^T\boldsymbol{\phi}'dx$$

og $\boldsymbol{\phi}'$ betyr derivasjon med hensyn på x.

a) Forklar betydningen av disse to matrisene og hvordan ligningen kan brukes til å estimere den kritiske lasten for bjelken.

b) Hvilke betingelser må formfunksjonene tilfredsstille?

Del B



Figur 3.

Når bjelkefunksjonene er valgt som formfunksjonene og endeforskyvningene og -rotasjonene er valgt som koeffisientene, er $\boldsymbol{K}$ og $\boldsymbol{K}_G$ for en bjelke eller søyle med aksialkraft P gitt som nedenfor.

Figur 3 viser en plan ramme med to like elementer AB og BC.

a) Bruk matrisene $\boldsymbol{K}$ og $\boldsymbol{K}_G$ med bjelkefunksjoner for å estimere den kritiske lasten for rammen.

b) Kommenter nøyaktigheten av resultatet.

Bjelkefunksjonene er gitt ved

$$\boldsymbol{\phi}^T = \begin{bmatrix} 2(\frac{x}{\ell})^3 - 3(\frac{x}{\ell})^2 + 1 \\ -x(1-\frac{x}{\ell})^2 \\ -2(\frac{x}{\ell})^3 + 3(\frac{x}{\ell})^2 \\ \frac{x^2}{\ell}(1-\frac{x}{\ell}) \end{bmatrix}$$

(Fortsettes side 5.)

Koeffisientene er gitt ved

$$\boldsymbol{c} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T$$

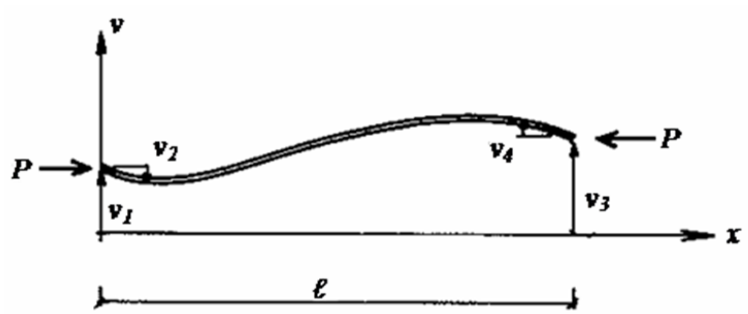
hvor v_1, v_2, v_3 og v_4 er definert i figur 4.

Matrisene $\boldsymbol{K}$ og $\boldsymbol{K}_G$ er gitt ved

$$\boldsymbol{K} = \frac{2EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 6 & -3\ell & -6 & -3\ell \\ -3\ell & 2\ell^2 & 3\ell & \ell^2 \\ -6 & 3\ell & 6 & 3\ell \\ -3\ell & \ell^2 & 3\ell & 2\ell^2 \end{bmatrix}$$

og

$$\boldsymbol{K}_G = \frac{1}{30\ell}\begin{bmatrix} 36 & -3\ell & -36 & -3\ell \\ -3\ell & 4\ell^2 & 3\ell & -\ell^2 \\ -36 & 3\ell & 36 & 3\ell \\ -3\ell & -\ell^2 & 3\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}$$



Figur 4.

SLUTT