UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

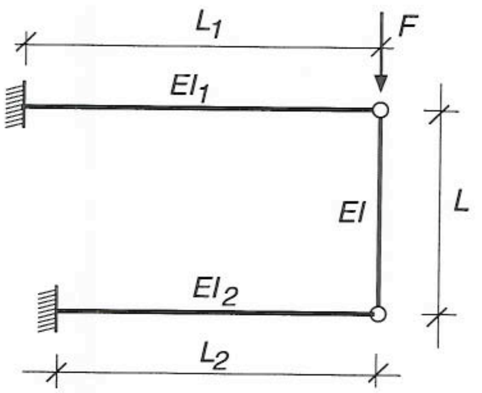
Eksamen i	MEK4530 — Stabilitet og knekning av konstruksjoner.
Eksamensdag:	Torsdag 3. juni, 2010
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg:	Formelark er inkludert i oppgavesettet.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann, "Matematisk formelsamling". Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1. (ca. 18%)



En søyle er forbundet med ledd til endene av to utkragerbjelker. Systemet er belastet som vist i figuren med en ytre vertikallast F.

Kritisk last av systemet kan beregnes ved enkle betraktninger og uttrykkes som

$$F_{kr} = \alpha \, \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Utrykk parameteren α som funksjon av lengder og bøyestivheter slik de er definert i figuren. Kun bøyning i planet og kun virkningen av bøyedeformasjoner skal medtas.

Oppgave 2. (ca. 15%)

a) Definer **kort** begrepet "fri hvelvning" og videre hva de to bidragene skyldes i følgende uttrykk for det totale torsjonsmomentet i en bjelke eller søyle:

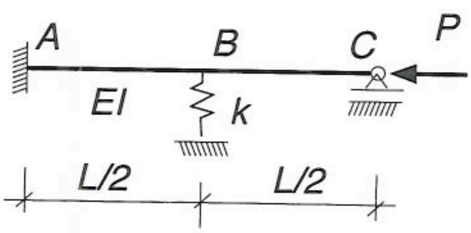
$$M_T = GJ \, \frac{d\theta}{dx} - E\Gamma \, \frac{d^3\theta}{dx^3}$$

(Fortsettes på side 2.)

b) Definer **kort** hva som ligger i de to begrepene torsjonsknekning av søyler og vipping av bjelker.

c) I noen tilfeller vil kritisk last av en romlig (3D) søyle være den laveste av de tre kritiske lastene som skyldes ren bøyeknekning om de to tverrsnittsaksene og ren torsjonsknekning. Gi et kort svar på hva som kjennetegner slike tilfeller?

Oppgave 3. (ca. 37 %)



En kontinuerlig bjelke med bøyestivhet EI har opplagerbetingelser og belastning som vist i figuren. I pkt. B er bjelken opplagt på en elastisk translasjonsfjær med fjærstivhet k.

a) Hvilke betingelser må valgte formfunksjoner tilfredsstille i Rayleigh-Ritzmetoden?

b) Begrunn/vis at følgende forskyvningsfunksjon tilfredstiller disse kravene:

$$v(x) = \sum c_i \phi_i = c_1\, x^2\,(x - L) + c_2\, x^3\,(x - L)$$

c) Den generaliserte systemstivhetsrelasjonen ($\boldsymbol{Kc} = \boldsymbol{R}$) kan utledes fra likevektsbetraktninger. Beskriv **kort** hvordan dette gjøres i Rayleigh-Ritzmetoden (1-2 setninger), og still opp systemstivhetsrelasjonen på symbolsk komponentform for det aktuelle tilfellet.

d) Forskyvningsfunksjonen i punkt (b) skal benyttes i det videre. For denne funksjonen, beregn stivhetsmatrisebidraget $\boldsymbol{K}_f$ fra fjæren (alle komponenter).

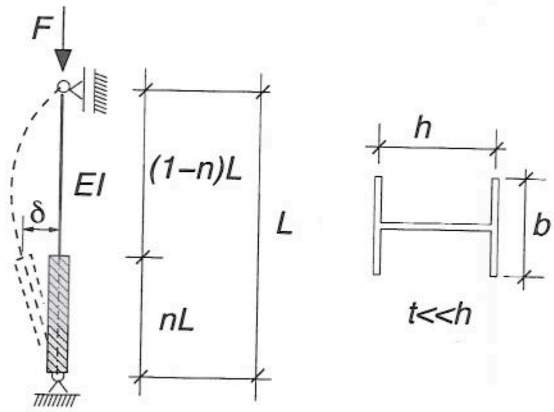
e) Beregn stivhetskoeffisientene K_{11} og $K_{G,11}$ for bjelkebidraget til den totale stivhetsmatrisen.

Oppgave 4. (ca. 30 %)

Den viste søylen nedenfor er leddlagret i begge ender. Den øvre delen med lengde $(1 - n)L$ har bøyestivhet EI, mens den nedre delen er fullstendig bøyestiv.

a) Still opp differensialligningen for søylens bøyelinje i det betraktede plan. Kun virkningen av bøyedeformasjoner skal medtas.

(Fortsettes på side 3.)



b) Vis at knekningsbetingelsen, som kritisk last kan bestemmes fra, blir
$\tan(k(1-n)L) = -knL$, hvor $k = \sqrt{P/EI}$,
og beregn kritisk last for tilfellet $n = 0.5$. (Gitt: Den transcendente ligningen $\tan x = -x$ har løsningen 0, 2.03, osv.)

c) Anta at øvre søyledel har et tynnvegget H-tverrsnitt med $b = h$ som er orientert slik at steget blir parallelt med papirplanet, og videre at de viste opplagerbetingelsene også er de samme for bøyning tvers på planet. Beregn minste kritiske last uttrykt med E, t, h, L.

SLUTT

(Fortsettes på side 4.)

VEDLEGG.

Rayleigh-Ritzmetoden.

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\phi_i(x) = \boldsymbol{\phi}\,\boldsymbol{c}$$

hvor ϕ_i er formfunksjonene og c_i de tilhørende koeffisientene, og hvor vektorene er definert ved

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi_1\ \phi_2\ \phi_3\ ....\ \phi_n] \quad \text{og} \quad \boldsymbol{c} = [c_1\ c_2\ c_3\ ....\ c_n]^T$$

Med disse kan systemstivhetsrelasjonen skrives på formen

$$(\boldsymbol{K} - P\boldsymbol{K}_G)\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{R}$$

For et system bestående av en bjelke/søyle med aksialtrykk P, bøyestivhet EI og neglisjerbare aksialdeformasjoner, er K generalisert bøyestivhetsmatrise (1. ordens) og K_G generalisert geometrisk stivhetsmatrise, definert ved

$$\boldsymbol{K} = \int_\ell EI\ (\boldsymbol{\phi}")^T\boldsymbol{\phi}"\,dx \qquad \boldsymbol{K}_G = \int_\ell (\boldsymbol{\phi}')^T\boldsymbol{\phi}'\,dx$$

Hvis metoden ovenfor anvendes på et enkelt element med 2 x 2 frihetsgrader, og formfunksjonene velges lik de kjente (1. ordens) bjelkefunksjonene, blir elementstivhetsrelasjonen

$$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{k} - P\boldsymbol{k}_G)\,\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{S} = [S_1\ S_2\ S_3\ S_4]^T \qquad \boldsymbol{v} = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4]^T$$

$$\boldsymbol{k} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{k}_G = \frac{1}{30L}\begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{2}$$