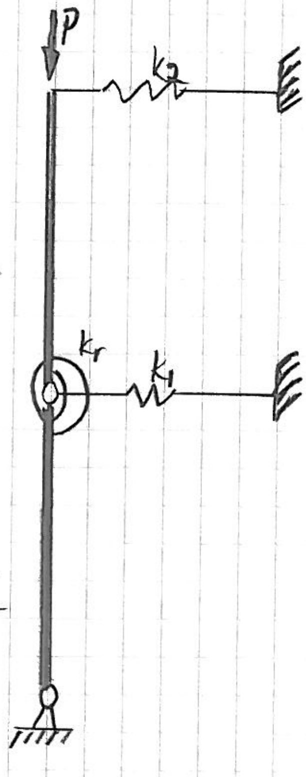
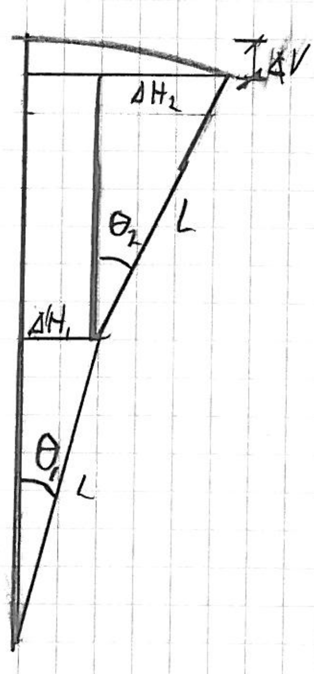
Eksamen i MEK 4530 6. juni 2011

Løsningsforslag

Oppgave 1





$$\Pi = H + U$$

$$H = -P \cdot \Delta V = -P\left(L(1-\cos\theta_1) + L(1-\cos\theta_2)\right) = LP(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 - 2)$$

$$U = \frac{1}{2}k_1(\Delta H_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(\Delta H_1 + \Delta H_2)^2 + \frac{1}{2}k_r(\theta_2 - \theta_1)^2$$

$$= \frac{1}{2}k_1 L^2 \sin^2\theta_1 + \frac{1}{2}k_2(L\sin\theta_1 + L\sin\theta_2)^2 + \frac{1}{2}k_r(\theta_2 - \theta_1)^2$$

Små deformasjoner $\sin\theta \approx \theta$ og $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$H \approx PL\left(1 - \frac{\theta_1^2}{2} + 1 - \frac{\theta_2^2}{2} - 2\right) = \frac{-PL}{2}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2\right)$$

$$U \approx \frac{1}{2}\cdot 2k\cdot L^2\,\theta_1^2 + \frac{1}{2}\cdot k_2\cdot\left(L\theta_1 + L\theta_2\right)^2 + \frac{1}{2}kL^2\left(\theta_2 - \theta_1\right)^2$$

$$= 2kL^2\,\theta_1^2 + kL^2\,\theta_2^2$$

$$\Pi = \left(2kL^2 - \frac{PL}{2}\right)\theta_1^2 + \left(kL^2 - \frac{PL}{2}\right)\theta_2^2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = \left(4kL^2 - PL\right)\theta_1$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = \left(2kL^2 - PL\right)\theta_2$$

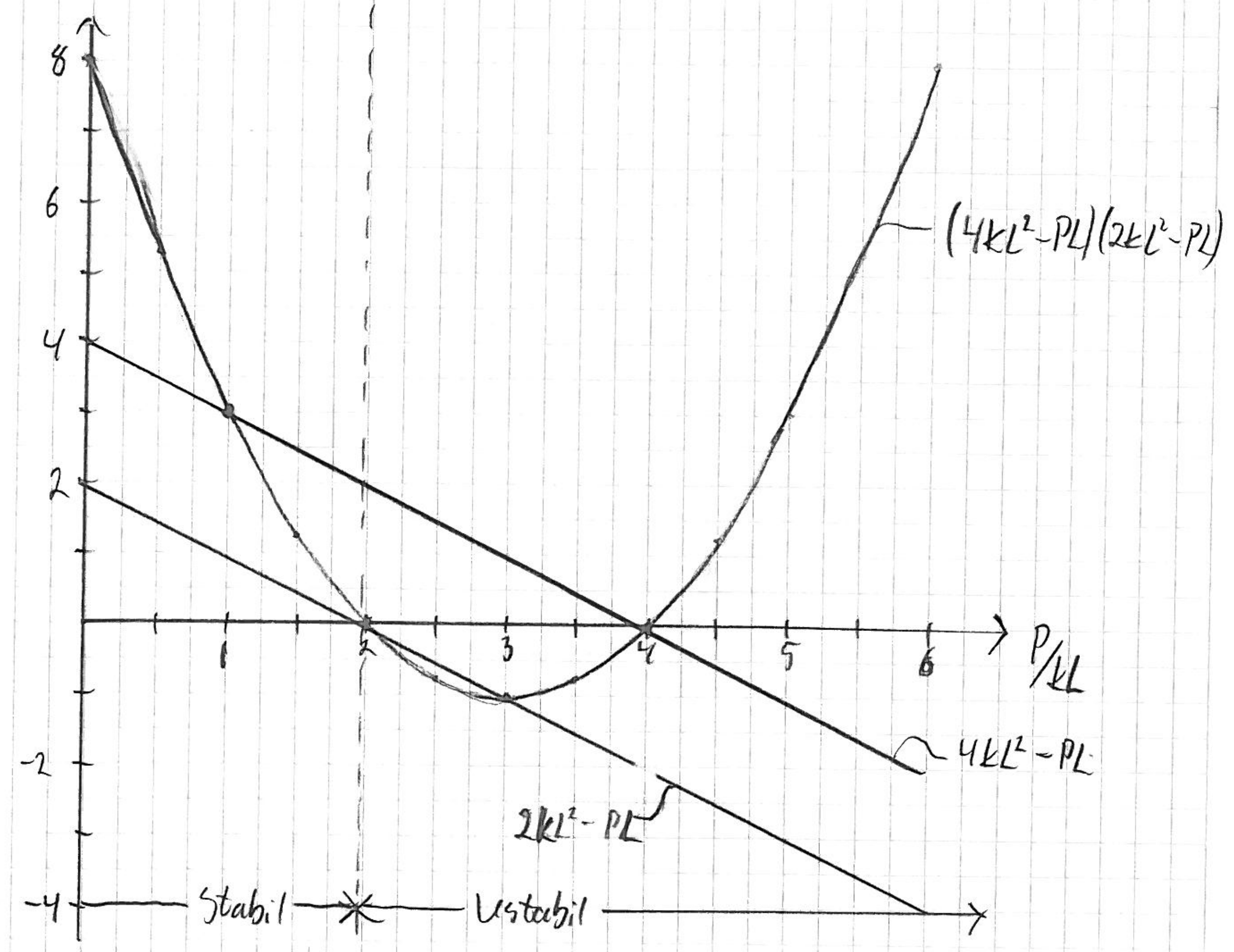
$$\begin{bmatrix} 4kL^2 - PL & 0 \\ 0 & 2kL^2 - PL \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbb{K}) = 0 \Rightarrow \left(4kL^2 - PL\right)\left(2kL^2 - PL\right) = 0$$

$$L^2P^2 - 6L^3kP + 8L^4k^2 = 0$$

$$\underline{\underline{P_1 = 2kL}} \qquad \underline{\underline{P_2 = 4kL}}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$


8
6
4
2
-2
-4
1
2
3
4
5
6
P/kL
(4kL²-PL)(2kL²-PL)
4kL² - PL
2kL² - PL
Stabil
Ustabil

Oppgave 2

a) Formfunksjonene må:
- Tilfredsstille de kinematiske randbet.
- Være lineært uavhengige

b) $v(0) = v(L) = 0$

O og L er røtter i begge formfunksjonene

Formfunksjonene har ulik polynomgrad → L.u.

c) $U = \frac{1}{2}k\,\theta_A^2 \approx \frac{1}{2}k\,\frac{dv}{dx}\Big|_0 = \frac{1}{2}k\,(L\cdot c_1)^2 = \frac{1}{2}kL^2c_1^2$

$$\frac{\partial U}{\partial c_1} = kL^2c_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial c_2} = 0$$

$$K_f = \begin{bmatrix} kL^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) $K = EI\int_0^L (\Phi'')^T\,\Phi''\,dx \qquad K_G = \int_0^L (\Phi')^T\,\Phi'\,dx$

$\Phi_1 = x(L-x) = Lx - x^2 \qquad \Phi_2 = x^2(L-x) = Lx^2 - x^3$

$\Phi_1' = L - 2x \qquad \Phi_2' = 2Lx - 3x^2$

$\Phi_1'' = -2 \qquad \Phi_2'' = 2L - 6x$

$$K_{11} = EI\int_0^L 4\,dx = 4EIL$$

$$K_{G11} = \int_0^L (L-2x)(L-2x)\,dx = \int_0^L L^2 - L2x - L2x + 4x^2\,dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - 2Lx^2 + L^2x\right]_0^L$$

$$= \left(\frac{4}{3} - 2 + 1\right)L^3 = \frac{L^3}{3}$$

$$K_{12} = EI\int_0^L 2(2L-6x)\,dx = 2EIL^2$$

$$K_{G12} = \int_0^L (L-2x)(2Lx-3x^2)\,dx = \frac{L^4}{6}$$

$$K_{21} = K_{12}$$

$$K_{G21} = K_{G12}$$

$$K_{22} = EI\int_0^L (2L-6x)^2\,dx = 4EIL^3$$

$$K_{G22} = \int_0^L (2Lx-3x^2)^2\,dx = \frac{2L^5}{15}$$

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 5EIL & 2EIL^2 \\ 2EIL^2 & 4EIL^3 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{K}_G = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3} & \frac{L^4}{6} \\ \frac{L^4}{6} & \frac{2L^5}{15} \end{bmatrix}$$

e) $k = EI/L$

$$\mathbb{K}_{tot} = \left(\begin{bmatrix} 5EIL & 2EIL^2 \\ 2EIL^2 & 4EIL^3 \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} L^3/3 & L^4/6 \\ L^4/6 & 2L^5/15 \end{bmatrix} \right)$$

$$\det(\mathbb{K}_{tot}) = 0$$

$$\frac{L^8}{60} P^2 - \frac{4EIL^6}{3} P + 16 EI^2 L^4 = 0$$

$$P_{kr} = \frac{40EI \pm 8\sqrt{2}\sqrt{5}\,EI}{L^2}$$

$$\underline{\underline{P_{kr1} \approx 14.7 \frac{EI}{L^2}}} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.82L)^2}$$

Oppgave 3

a) • Tverrsnitt A er dobbeltsymmetrisk og lukket (stor torsjonsstivhet). Knekker trolig i ren bøyeknekning

• Tverrsnitt B er dobbeltsymmetrisk og åpent tynnvegget. Trolig ren torsjonsknekning

• Tverrsnitt C er ikke dobbeltsymmetrisk. Arealsenter og skjærsenter sammenfaller ikke. → Kombinasjon.

b) Vipping: For bjelker med stor bøyestivhet i bøyeplanet i forhold til stivhet ut av planet vil trykksonen av tverrsnittet kunne knekke ut samtidig som strekksonen "holder igjen". Tverrsnittet vipper ut til siden.

Forstørrelsesfaktor: Aksialkraftens momentvirkning vil føre til at tverrforskyvningen (som skyldes formfeil, endemomenter eller tverrlast) øker med forstørrelsesfaktoren f.

Ustabil postkritisk oppførsel: Lasten kan ikke økes etter forgreiningspunktet. Eksakt teori viser at lasten avtar med økende deformasjon.

Fri hvelving: Ingen fastholdning normalt på tverrsnittet.

c) $\nabla^4 w = \frac{1}{D}\left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$

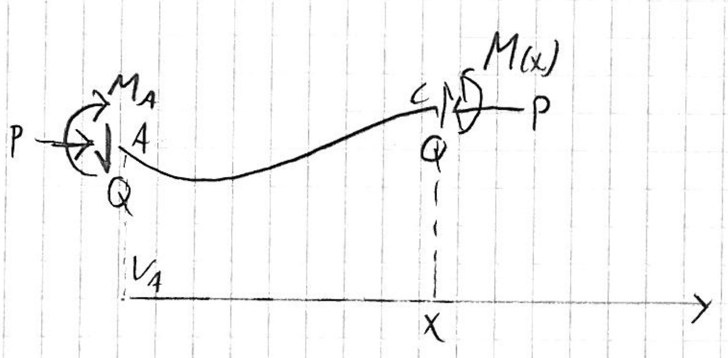
∇^2 kalles Laplace-operatoren ("dell i andre"): $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
og er anvent to ganger på tverrforskyvningen w:
$\nabla^2 \nabla^2 w = \nabla^4 w$

D uttrykker bøyestivheten pr. "enhetsbredde" av platen. $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$
q er fordelt tverrlast

N_x og N_y er aksialkraft pr. "enhetsbredde" som henholdsvis virker i x-retn. og y-retn.
N_{xy} er skjærkraft (i planet) pr. "enhetsbredde".

Oppgave 4.

a) Ser på bjelkeelement AC og krever momentlikevekt om punktet C



$$M_A - M(x) - Q\cdot x + P(V_A - V(x)) = 0$$

$$M(x) = EI\frac{d^2V}{dx^2}$$

$$EI\frac{d^2V}{dx^2} + PV = PV_A + M_A - Qx$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{P}{EI}V = \frac{1}{EI}(PV_A + M_A - Qx) \quad \text{q.e.d.}$$

b) Momentet i en bjelke med initiell formfeil V_0 blir

$$M(x) = EI\frac{d^2}{dx^2}(V - V_0)$$

Slik endres differensiallligningen til

$$\frac{d^2(V-V_0)}{dx^2} + \frac{P}{EI}V = \frac{1}{EI}(PV_A + M_A - Qx) \quad \text{q.e.d.}$$

d) $V_0(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

$V_A = 0$, $M_A = 0$ og $Q = 0$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \frac{P}{EI} v = \frac{1}{EI}\left(0 \cdot v_A + 0 - 0 \cdot x\right)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{P}{EI} v = \frac{d^2 v_0}{dx^2} = -a \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Homogenløsning:

$$V_h(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$$

En partikulærløsning er $v_p(x) = C_3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

Totalløsningen blir dermed:

$$V(x) = V_h(x) + V_p(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) + C_3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Randbetingelser:

$V(0) = C_2 = 0$ $\quad$ $V(L) = C_1 \sin(kL) = 0$

For $0 < P < P_E$ blir $C_1 = 0$

$V(x) = V_p(x) = C_3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

Setter inn i diff. ligningen:

$$-C_3 \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{P}{EI} C_3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = -a \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Løser for C_3: $C_3\left(\frac{-\pi^2}{L^2} - k^2\right) = -a\frac{\pi^2}{L^2} \Rightarrow C_3 = -a \frac{\frac{\pi^2}{L^2}}{k^2 - \frac{\pi^2}{L^2}} = a \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}}$

$$V(x) = C_3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = a \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}} = V_0 \frac{1}{1 - P/P_E}$$

Deformasjonen går mot uendelig når P går mot P_E.