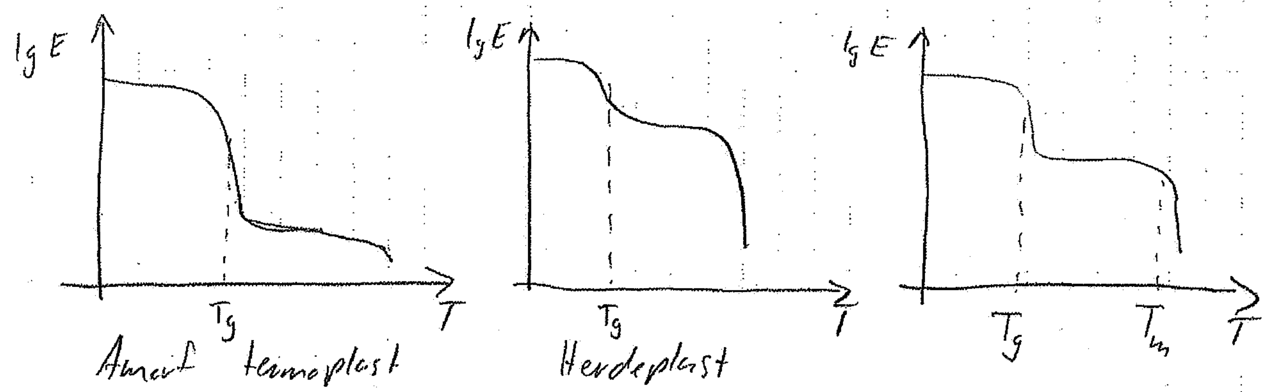
MEK 4540/9540 – 2008 – Løsningsforslag

Oppgave 1

a)

	Stivhet	Styrke
Polyetylen	1000 MPa	30 MPa
Epoxy	2-4000 MPa	60-120 MPa
Carbon fiber	200-600 GPa	2-4000 GPa

b) Ved glassovergangstemperaturen (T_g) endres materialets stivhet signifikant.

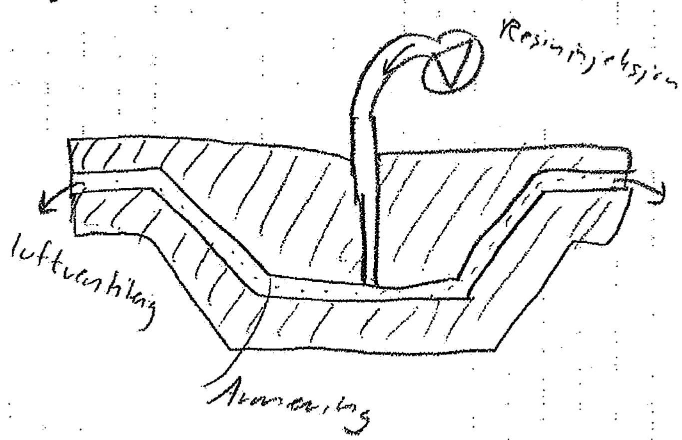


c) RTM

Våtimpregnering av fiber i en lukket form ved bruk av trykk og evt. vakuum

Fordeler:
- Overflate finish
- Hurtig
- Repetisjon
- HMS

Ulemper
- Utstyrskrevende
- Små komponenter



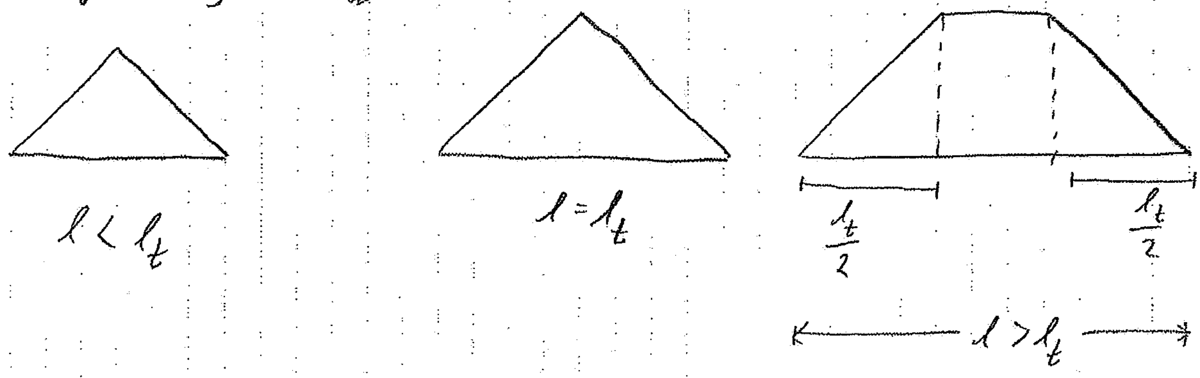
②

d)

Lastoverføringslengden (l_t)

Minste lengde en fiber må ha for at maksimal spenning i fiberen skal være like stor som i en kontinuerlig fiber

Spenningsfordeling i fiber



Kritisk fiberlengde

Minste lengde en fiber må ha for at maksimal spenning i fiberen skal bli lik fiberens bruddspenning

Oppgave 2

a) $$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{130} & -\frac{1}{520} & 0 \\ -\frac{1}{520} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \times 10^{-3} \frac{1}{MPa}$$

$$= \begin{bmatrix} 7.69 \times 10^{-3} & -1.92 \times 10^{-3} & 0 \\ -1.92 \times 10^{-3} & 1.11 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \times 10^{-3} \frac{1}{MPa}$$

b) $$[Q] = [S]^{-1} = \begin{bmatrix} 131 & 2.26 & 0 \\ 2.26 & 9.03 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \times 10^{3} \, MPa$$

$[Q]_{90}$ kan da enkelt bestemmes ved å bytte Q_{11} og Q_{22} s.a.

$$[\bar{Q}]_{90} = \begin{bmatrix} 9.03 & 2.26 & 0 \\ 2.26 & 131 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

c) Belastning for et [0 90 90 0] laminat
med $t_k = 1mm$

Har at

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

der $[A] = \sum_{k=1}^{4} [Q]_k (h_k - h_{k-1})$

$$= 2[Q]t_k + 2[Q]_{90} t_k = 2 \begin{bmatrix} 131 & 2.26 & 0 \\ 2.26 & 9.03 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \times 10^3 + 2 \begin{bmatrix} 9.03 & 2.26 & 0 \\ 2.26 & 131 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$= \begin{bmatrix} 279 & 9.04 & 0 \\ 9.04 & 279 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ MPa mm}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 279 & 9.04 & 0 \\ 9.04 & 279 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} N/mm = \begin{bmatrix} 562 \\ 157 \\ 20 \end{bmatrix} N/mm$$

d) E-modul for laminatet

Beregner først tøyningen for enakset belastning

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 3.59 & -0.116 & 0 \\ -0.116 & 3.59 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \; (\text{MPa mm})^{-1}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = 3.59 \times 10^{-6} N_x$$

E-modul er definert som

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{\frac{N_x}{\Sigma t_k}}{3.59 \times 10^{-6} N_x} = \frac{\frac{1}{4\text{mm}}}{3.59 \times 10^{-6} (\text{MPa mm})^{-1}} =$$

$$= 69.7 \times 10^{3} \text{ MPa} = \underline{\underline{69.7 \text{ GPa}}}$$

e) Første brudd-feil (Antar max tøynings kriterium)

$\sigma_{LU} = \varepsilon_{LU} E_L = 1300\ MPa$

$\sigma_{TU} = \varepsilon_{TU} E_T = 45\ MPa$

$\tau_{LTU} = \gamma_{LTU} G_{LT} = 250\ MPa$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_x = 3.59 \times 10^{-6} N_x$

$\varepsilon_y = -116 \times 10^{-9} N_x$

$\gamma_{xy} = 0$ $N_x = -\frac{\varepsilon_y}{116 \times 10^{-9}}$

$$\varepsilon_x = -3.59 \times 10^{-6} \frac{\varepsilon_y}{116 \times 10^{-9}} = -30.9\ \varepsilon_y$$

For 0-lag

$\varepsilon_L = \varepsilon_x$

$\varepsilon_T = -\frac{1}{30.9} \varepsilon_x$

For 90-lag

$\varepsilon_L = -\frac{1}{30.9} \varepsilon_x$

$\varepsilon_T = \varepsilon_x$

$\therefore$ Første bruddfeil vil være i 90-lagene. – matrisebrudd

f) Failure load

$$N_x = 279 \times 10^3 \, \varepsilon_{TU} + 9.04 \times 10^3 \, \frac{\varepsilon_{TU}}{30.9}$$

$$= 1400 \ N/mm$$

$$\sigma_x = \frac{1400 \ N/mm}{4 mm} = \underline{\underline{349 \ MPa}}$$

Oppgave 3

DEL A

(a)
- Stor bøyestivhet (i forhold til vekten)
- Stor styrke i bøyning (i forhold til vekten)
- Glatte overflater begge sider siden det ikke er behov for avstivning
- Muligens også termisk isolering, avhengig av kjernematerialet og anvendelse.

(b)
- Flyt og/eller brudd i skallene i enten strekk eller trykk
- Flyt og/eller brudd i kjernen som resultat av skjærspenninger
- Lokal deformasjon, evt. flyt og/eller brudd, forårsaket av konsentrerte laster eller ved sammenføyninger.
- Global knekning (generelt ~~sett~~ med en blanding av bøyning og skjær). Knekning med kun bøyning og kun skjær (shear crimping) er begge ekstreme tilfeller når den ene eller den andre type deformasjonen er dominerende.
- Lokal knekning av skall ("face sheet wrinkling" eller "dimpling").
- For stor nedbøyning kan også være avgjørende.

DEL B

(a) Bøyestivhet D er forholdet mellom bøyemoment og krumning fra bøyning. Innenfor små forskyvninger er

$$D = (-)\, M_x \Big/ \frac{d^2 w_b}{dx^2}$$

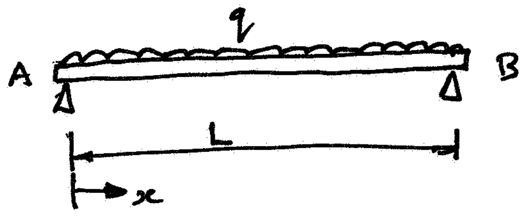
w_b = forskyvning forårsaket av bøyning
M_x = bøyemoment per breddeenhet.

Skjærstivhet S er forholdet mellom skjærkraft og skjærdeformasjon målt som gjennomsnittlig skjærtøyning over tverrsnittet. Dersom det ikke er bidrag fra i-plan skjærdeformasjon kan vi skrive

$$S = T_x \Big/ \frac{dw_s}{dx}$$

w_s: forskyvning forårsaket av skjær
T_x: skjærkraft per breddeenhet

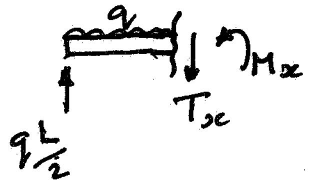
(b)



Partielle forskyvninger:

$$w = w_b + w_s$$

fra bøyning — fra skjærdeformasjon



$$M_x = -D w_b'' = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} \qquad \text{——(1)}$$

$$T_x = S w_s' = \frac{qL}{2} - qx \qquad \text{——(2)}$$

(1) integreres:

$$-D w_b' = \frac{q}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 L - \frac{1}{3}x^3\right) + C_1$$

$$-D w_b = \frac{q}{2}\left(\frac{1}{6}x^3 L - \frac{1}{12}x^4\right) + C_1 x + C_2$$

Randbetingelser: $w_b(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

$w_b(L) = 0 \rightarrow 0 = \frac{q}{2}\cdot\frac{1}{12}L^4 + C_1 L$

$C_1 = -\frac{1}{24}qL^3$

Så har vi:

$$w_b = \frac{1}{D}\left\{-\frac{q}{2}\left(\frac{1}{6}x^3 L - \frac{1}{12}x^4\right) + \frac{1}{24}qL^3 x\right\}$$

$$= \frac{qx}{24D}\left(L^3 - 2Lx^2 + x^3\right)$$

(2) integreres:

$$S w_s = \frac{qLx}{2} - \frac{1}{2}qx^2 + C_3$$

Randbetingelser: $w_s(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$

Så har vi: $w_s = \frac{1}{2}\frac{qx}{S}(L - x)$ (Merk at dette tilfredsstiller $w_s(L) = 0$)

Bidragene kombineres:

$$w = w_b + w_s$$

$$= \frac{qx}{24D}\left\{\left(L^3 - 2Lx^2 + x^3\right) + \frac{12D}{S}(L - x)\right\}$$

$$= \underline{\underline{\frac{qx(L-x)}{24D}\left\{\left(L^2 + Lx - x^2\right) + \frac{12D}{S}\right\}}}$$

Så er $\delta = w(L/2) = \frac{q\left(\frac{L}{2}\right)^2}{24D}\left\{\left(L^2 + \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{4}\right) + \frac{12D}{S}\right\}$

$$= \frac{qL^2}{96D}\left(\frac{5}{4}L^2 + \frac{12D}{S}\right)$$

$$= \frac{5qL^4}{384D}\left(1 + \frac{48}{5}\frac{D}{SL^2}\right)$$

(c) Når D/SL^2 er liten har vi kun bøyning så $\delta \to \frac{5qL^4}{384D}$.

Dette skjer dersom D er liten, S er stor og/eller L er stor

Når D/SL^2 er stor har vi kun skjærdeformasjon så $\delta \to \frac{qL}{4S}$.

Dette skjer dersom D er stor, S er liten og/eller L er liten.

(d) Hvis ende A blir fast innspent er bjelken statisk ubestemt samtidig med at den ikke lenger er symmetrisk. Vi har 2 ukjente reaksjonskrefter pluss 1 ukjent reaksjonsmoment, men kun 2 uavhengige likevektsligninger.

Vi får også 2 ukjente integrasjonskonstanter når vi integrerer uttrykket for w_b'' 2 ganger (for å gi oss w_b). Vi får 1 ukjent integrasjonskonstant i uttrykket for w_s, men denne kan kombineres med en av konstantene fra w_b når vi kombinerer $w_b + w_s$ (som $C_1 + C_3$ i deloppgave (b)). Da har vi tilsammen 3 ukjente.

For å finne de 3 ukjente må vi nå bruke følgende randbetingelser:

$$\left.\begin{aligned} w(0) &= w_b(0) + w_s(0) = 0 \\ w_b'(0) &= 0 \\ w(L) &= w_b(L) + w_s(L) = 0 \end{aligned}\right\}$$