Løsningsforslag øving 7, oppgave 47 og 51

Oppgave 47

La $X_1, \ldots, X_n$ være tilfeldige ovservasjoner fra normalfordelingen med kjent forventing μ og ukjent standardavvik σ.

a) Informajonen $I(\sigma)$ for en observasjon blir

$$
\begin{aligned}
f(x|\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
lnf(x|\sigma) &= ln(1/\sqrt{2\pi}) - ln(\sigma) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \\
\frac{d}{d\sigma} lnf(x|\sigma) &= -1/\sigma + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} \\
\frac{d^2}{(d\sigma)^2} lnf(x|\sigma) &= 1/\sigma^2 - \frac{3(x-\mu)^2}{\sigma^4} \\
I(\sigma) &= E[-\frac{d^2}{(d\sigma)^2} lnf(x|\sigma)] = -1/\sigma^2 + \frac{3}{\sigma^4} E((x-\mu)^2) = -1/\sigma^2 + \frac{3}{\sigma^4}\sigma^2 \\
&= 2/\sigma^2
\end{aligned}
$$

b) Fra oppgave 46a vet vi at $I(\sigma^2) = 1/2(\sigma^2)^2$. Dette betyr at informationen I er avhengig av parametriseringen.

Oppgave 51

For en estimator er MSE=$E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$. Dersom estimatoren er forventningsrett er MSE $=$ var$(\hat{\theta})$. Vi skal se på en forventningsrett estimator $\hat{\sigma}^2$ på formen KS^2 der S^2 er den empiriske variansen. Populasjonsfordelingen er normal, og da er $E[(S^2)^2] = (n+1)\sigma^4/(n-1)$. Hvilken verdi for K minimerer MSE$(\hat{\sigma^2})$?

$$
\begin{aligned}
MSE(K) &= E[(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2] = E[(KS^2 - \sigma^2)^2] = E[K^2S^4 - 2KS^2\sigma^2 + \sigma^4] \\
&= K^2E[(S^2)^2] - 2KE(S^2)\sigma^2 + \sigma^4 = K^2\frac{(n+1)}{(n-1)}\sigma^4 + 2K\sigma^4 + \sigma^4 \\
&= \sigma^4(K^2\frac{n+1}{n-1} - 2K + 1) \\
\frac{dMSE(K)}{dK} &= \sigma^4(2K\frac{n+1}{n-1} - 2) \\
\frac{d^2MSE(K)}{(dK)^2} &= \sigma^4 2\frac{n+1}{n-1}
\end{aligned}
$$

Når vi sette den enkel deriverte lik null finner vi $K = \frac{n-1}{n+1}$. Dette gir et minimum for MSE(K) siden den dobbelt deriverte alltid er større enn null.