Ekstraoppgave 7

Anta at $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige eksponensialfordelte stokastiske variabler med sannsynlighetstetthet $f(x;\lambda) = \lambda \exp(-\lambda x)$ for $x > 0$. Vi vil teste nullhypotesen $H_0 : \lambda = \lambda_0$ mot den alternative hypotesen $H_0 : \lambda \neq \lambda_0$, der λ_0 er et kjent tall.

a) Bestem sannsynlighetskvoten (likelihood ratio).

b) Vis at

$$-2\log(\text{sannsynlighetskvoten}) = 2n(\bar{X}\lambda_0 - 1) - 2n\log(\bar{X}\lambda_0)$$

For hvilke verdier av denne forkastes nullhypotesen på 5% nivå ?

Ekstraoppgave 8

I eksempel 3 på sidene 3-4 og 16-18 i Storviks notat om "Numerical optimization of likelihoods" studeres data om levetider for leukemipasienter. Som i Storviks notat vil vi anta at levetidene er Weibull-fordelte. Vi antar altså at de observerte levetidene er uavhengige observasjoner av Weibull-fordelte stokastiske variabler $X_1, X_2, \ldots, X_n$ med sannsynligetstetthet

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-(x/\alpha)^\beta} \tag{1}$$

for $x > 0$. Merk at Weibull-fordelingen (1) har en annen parameterisering enn den som er benyttet i avsnitt 4.5 i D&B.

a) Finn uttrykk for likelihooden og log-likelihooden. (Disse er gitt på side 4 i notatet til Storvik. Men prøv selv før du ser på uttrykkene der.)

b) Finn scorefunksjonene ved å derivere log-likelohooden med hensyn på α og β. (Prøv selv før du ser på uttrykkene på side 5 i notatet til Storvik.)

c) Bestem elementene i den observerte informasjonsmatrisen. (Prøv selv før du ser på uttrykkene på side 17 i notatet til Storvik.)

d) Forklar hvordan du kan bruke Newton-Raphsons metode for å finne maksimum likelihood estimatene. (Du skal her bare beskrive metoden uten å gjøre noen beregninger.)

e) På side 18 i notatet til Storvik er det gitt en funksjon, kalt `nr.weibull`, som finner maximum likelihood estimatene for Weibull-fordelingen ved Newton-Raphsons metode. Kopier denne koden fra pdf-filen av notatet til Storvik og lim den inn i `R`. Pass på at du forstår at koden implementerer Newton-Raphsons algoritme.

f) Bruk funksjonen `nr.weibull` til å finne maksimum likelihood estimatene for dataene i tabell 1.1 på side 5 i notatet til Storvik. (Du må selv lese dataene inn i vektoren `x`. Du kan finne egnede startverdier for parametrene ved å se på figur 1.4 på side 6 i notatet til Storvik.)

g) Bestem maksimumsverdien av log-likelihooden, dvs. verdien av log-likelihooden når α og β er lik maksimum likelihood estimatene.

Vi ønsker nå å teste nullhypotesen $H_0 : \beta = 1$ mot den alternative hypotesen $H_0 : \beta \neq 1$. Merk at under nullhypotesen er levetidene $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eksponensialfordelte med parameter $\lambda = 1/\alpha$.

h) Vis at under H_0 er maksimum likelihood estimatoren for α lik $\overline{X}$.

i) Bestem maksimumsverdien av log-likelihooden under H_0.

j) Bruk resultatene i punktene g) og i) til å bestemme $-2\log(\text{sannsynlighetskvoten})$. Bestem P-verdien for sannsynlighetskvotetesten og kommenter resultatet.