

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: STK 2500 — Livsforsikring.

Eksamensdag: Torsdag 18. desember 2003.

Tid for eksamen: 14.30 – 17.30.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

En livrente med oppsettelsestid n år tegnes av en forsikret i alder x . Livrenten skal utbetales kontinuerlig med konstant utbetalingsintensitet S så lenge de forsikrede lever etter alder $x + n$.

Til tarifferingen benyttes et beregningsgrunnlag bestående av renteintensiteten δ og dødsintensiteten μ_y . (Vi ser i denne oppgaven fullstendig bort fra omkostningselementer.)

- a) Still opp og forklar et uttrykk for kontantverdien på tegningstidspunktet av utbetalingene for denne livrenten, som en stokastisk variabel.

Utled et uttrykk for livrentens forventede kontantverdi ${}_n|\bar{a}_x \cdot S$.

- b) Vis at

$${}_n|\bar{a}_x = v^n \cdot {}_n p_x \cdot \bar{a}_{x+n}$$

- c) Vis at

$$\frac{d}{dt} [{}_{n-t}|\bar{a}_{x+t}] = (\delta + \mu_{x+t}) \cdot [{}_{n-t}|\bar{a}_{x+t}]$$

når $0 \leq t \leq n$.

(Fortsettes side 2.)

Den forsikrede skal betale premien kontinuerlig og med en variabel innbetalingsintensitet P_t på tid t for $0 \leq t \leq n$.

- d) Utled Thieles differensialligning for utviklingen i livrentens premieerserve V_t , såvel i oppsettelsestiden som i løpetiden for livrenten.

I oppsettelsestiden defineres livrentens fripolise F_t på tidspunkt t ved

$$V_t = F_t \cdot [{}_{n-t}|\bar{a}_{x+t}]$$

- e) Forklar hva F_t står for.

Premieinnbetalingen skal innrettes slik at fripolisen opptjenes lineært, dvs. slik at

$$F_t = \frac{t}{n} \cdot S$$

når $0 \leq t \leq n$.

- f) Vis ved hjelp av Thieles differensialligning at

$$P_t = \frac{1}{n} \cdot S \cdot [{}_{n-t}|\bar{a}_{x+t}]$$

for $0 \leq t \leq n$. Gi en intuitiv begrunnelse for dette uttrykket for premien.

- g) Vis at premieplanen tilfredsstiller ekvivalensprinsippet.

L \bar{P} betegne den konstante premieintensiteten for samme livrenten.

- h) Vis at P_t er en voksende funksjon av t og forklar at $P_0 < \bar{P} < P_n$.
- i) Vis at ved konstant premiebetaling gjelder $F_t = [\bar{a}_{x:\bar{t}}/\bar{a}_{x:\bar{n}}] \cdot S$. Sammenlign denne fripolisens opptjening med den lineære opptjeningen.

Anta at framtidig livrenteintensitet, hittil kalt S , gjøres tidsavhengig, kalles S_t og vokser deriverbart fra S_0 til S_n , som blir den virkelige pensjonsintensiteten. Fripolisen er lineær, men nå i forhold til S_t .

- j) Finn og forklar intuitivt et uttrykk for P_t i denne utvidede modellen.

SLUTT